Содержание

Предисловие научного редактора к препринту пособия **5**
Предисловие автора к препринту пособия **6**
Предисловие автора к расширенному изданию учебного пособия **9**
Введение **12**
Часть 1. Вопросы нелинейной динамики сплошных сред **15**
1.1. Сомнительные нюансы общепринятого подхода к отождествлению переменных Эйлера и Лагранжа в динамике деформируемых сред 15
1.1.1. Общие положения 15
1.1.2. Координатный способ представления закона движения 16
1.1.3. Представление закона движения посредством вектора перемещения 18
1.1.4. Об однозначности взаимных преобразований координат 19
1.1.5. Контрольные вопросы 21
1.2. Особенности отождествления деформаций, записанных в переменных Эйлера и Лагранжа 22
1.2.1. Общие положения 22
1.2.2. Координатный способ представления деформаций 22
1.2.3. Представление деформации через перемещение 23
1.2.4. Сомнительные особенности при записи деформаций 23
1.2.5. Примеры к п.п. 1.1 и 1.2 26
1.2.6. Контрольные вопросы 28
1.3. Особенности представления скоростей и ускорений в переменных Эйлера и Лагранжа 29
1.3.1. Представление скорости и ускорения в координатной форме 29
1.3.2. Представление скорости и ускорения через перемещения 29
1.3.3. Особые формы представления скорости и ускорения 31
1.3.4. Примеры 34
1.3.5. Контрольные вопросы 36
1.4. Парадоксальные особенности вывода уравнений движения 37
1.4.1. Общие положения 37
1.4.2 Противоречия вывода уравнений движения в переменных Лагранжа 37
1.4.3. Особенности вывода уравнений движения в переменных Эйлера 39
1.4.4. Оценка весомости нелинейных членов 41
1.4.5. Противоречия вывода классического уравнения колебаний струны 44
1.4.6. Общие выводы 47
1.4.7. Примеры 50
1.4.8. Контрольные вопросы 53
1.5. Методология оценки погрешности трехмерных уравнений движения классической теории упругости (уравнений Ламе) 55
1.5.1. Общие положения 55
1.5.2. Представление общего решения уравнений Ламе 56

1.5.3. Оценка погрешности трехмерного волнового уравнения 59
1.5.4. Оценка погрешности уравнений Ламе 62
1.5.5. Контрольные вопросы 63
1.6. Парадоксы классических решений волнового уравнения 63
1.6.1. Свободные продольные колебания стержня 64
1.6.2. Вынужденные колебания стержня под действием внезапно приложенный постоянной силы 69
1.6.3. Колебания при внезапной остановке одного конца стержня, движущегося с постоянной скоростью 72
1.6.4. Задача о продольном ударе по свободному концу стержня 74
1.6.5. О нарушении принципа суперпозиции частных решений 75
1.6.6. Сомнительный «парадокс» отсутствия решений при резонансе 76
1.6.7. Характерные признаки парадоксальных решений, полученных методом Фурье 77
1.6.8. Контрольные вопросы 78
1.7. Исторические корни математических парадоксов и физически бессмысленных точных решений классических задач 79
Список использованной литературы 82
Часть 2. Новые подходы к постановкам и решения некоторых классических задач для волнового уравнения 84
2.1.Невероятные физические недоразумения традиционных математических постановок классических задач о колебаниях упругих тел 84
2.1.1. Вводные замечания 84
2.1.2. Правдоподобные физические предпосылки, несовместимые математические постановки и бессмысленные решения некоторых классических задач 85
2.1.3. Сомнительные физические предпосылки традиционных постановок задач о распространении локальных возмущений в упругих средах 89
2.1.4. Краткие выводы 91
2.1.5. Контрольные вопросы 91
2.2. Очевидный упрощенный подход к постановке и решение задачи о свободных колебаниях струны 93
2.2.1. Предварительные замечания 93
2.2.2. Формулирование начальных условий 93
2.2.3. Решение линейного однородного уравнения колебания струны 97
2.2.4. Преобразование решения и анализ новых явлений 97
2.2.5. Краткие выводы 99
2.2.6. Контрольные вопросы 100
2.3. Упрощенный подход к постановке и решение задачи о свободных колебаниях стержня с одним закрепленным концом 101
2.3.1. Предварительные замечания 101
2.3.2. Формулирование начальных и граничных условий 102
2.3.3. Решение волнового уравнения 105
2.3.4. Эффект увеличения нагрузки на закрепленном конце 107
2.3.5. Предварительная оценка погрешности линейного волнового

уравнения 108
2.3.6. Краткие выводы 108
2.3.7. Контрольные вопросы 109
2.4.Вынужденные колебания стержня под действием внезапно приложенной постоянной силы 110
2.4.1. Предварительные замечания 110
2.4.2. Формулирование начальных и граничных условий 111
2.4.3. Решение волнового уравнения 113
2.4.4. Анализ динамических эффектов 116
2.4.5. Краткие выводы 117
2.4.6. Контрольные вопросы 118
2.5. Колебания многомассовых дискретно-континуальных систем с постоянными параметрами 119
2.5.1. Состояние вопроса 119
2.5.2. Постановка задачи (продольные колебания) 120
2.5.3. Интегральный метод построения определяющих соотношений для реакций связей 122
2.5.4. Общие уравнения движения дискретно-континуальной системы (продольные колебания) 125
2.5.4, а. Примеры 126
2.5.5. Распространение интегрального метода на крутильные колебания дискретно-континуальной системы 128
2.5.6. Оценка погрешности метода 133
2.5.7. Сравнительный анализ некоторых решений для дискретно-континуальных и дискретных моделей 134
2.5.7.а. Кинематическая аналогия дискретно-континуальных и дискретных моделей 135
2.5.7.в. Особые случаи нагружения дискретно-континуальной системы в режиме свободных колебаний 136
2.5.7.с. Особенности нагружения дискретно-континуальной системы в режиме вынужденных колебаний 140
2.5.8. Анализ собственных частот дискретно-континуальных моделей 142
2.5.8.а. Примеры 142
2.5.9. О решении «резонансных» задач 148
2.5.10. Оценка достоверности основных результатов 150
2.5.11. Краткие выводы 152
2.5.12. Контрольные вопросы 153
2.6. Уравнения движения многомассовых дискретно- континуальных систем с переменными массами 155
2.6.1. Состояние вопроса 157
2.6.2. Постановка задачи 157
2.6.3. Вывод уравнения движения деформируемого стержня с переменной массой 159
2.6.4. Вывод определяющих соотношений для реакций связей с учетом начальных деформаций присоединяемых частей 161
2.6.5. Общие уравнения движения 163

2.6.6. Оценка погрешности и достоверности основных результатов 164
2.6.7. Примеры актуальных для практики задач 165
2.6.7.а. Уравнения динамики шахтного подъема 165
2.6.7.в. Уравнения динамики вала с подвижной массой 168
2.6.8. Краткие выводы 170
2.6.9. Контрольные вопросы 170
2.7. Распространение интегрального метода на трехмерные объекты 171
2.7.1.Осреднение компонент тензора напряжений 171
2.7.2. Вывод определяющих соотношений для тела в целом 173
2.7.3. Примеры 179
2.7.4. Краткие выводы 185
2.7.5. Контрольные вопросы 186
Список использованной литературы 186
Послесловие 189

Нет ничего тяжелее, как преодолеть груз правильного, но слишком частного знания, пересмотреть традиции своих предшественников. Это – наибольшая оригинальность, которую может достичь человек.

К. Трусделл

Предисловие научного редактора к препринту пособия

В истории науки известны удивительные случаи, когда хорошо известные положения в одной ветви знаний либо умалчиваются, либо практически не обсуждаются в достаточно близкой, но другой области знаний. Доцент Козачок А. А. обратил внимание, что именно так обстоит дело в двух близких областях физики – гидродинамике и механике деформируемого твердого тела. Для описания процессов и явлений в аэродинамике и гидродинамике широко пользуются динамическими уравнениями, записанными в переменных Эйлера. В этих уравнениях, даже без анализа зависимости сил от координат и скоростей имеется нелинейность кинематического происхождения: произведение

$$\left(\partial V_i / \partial x_l\right) V_l. \tag{1}$$

В механике деформируемого твердого тела пользуются двумя типами переменных при написании уравнений динамики – переменными Лагранжа и переменными Эйлера. Напомним, что переменные Лагранжа – это переменные, которые «нумеруют» частицы твердого тела. По этой причине динамические уравнения в переменных Лагранжа не имеют слагаемых (1). Эти уравнения представляют собой обобщение уравнения Ньютона на случай сплошной материальной среды.

Переменные Эйлера нумеруют точки лабораторной системы координат, в которой рассматривается деформируемое твердое тело. По этой причине динамические уравнения сплошного деформированного твердого тела (ДТТ) должны содержать слагаемое (1).

В предлагаемом Вашему вниманию небольшому по объему, но емкому по содержанию, пособию подробно анализируются оба используемые в настоящее время подхода для описания: эйлеров и лагранжев способы описания деформаций. Автор приводит не только общие соображения, но и целый ряд примеров, демонстрирующих преимущества того или другого методов при решении конкретных задач теории ДТТ.

Несомненно, эта работа будет полезна научным работникам, инженерам, аспирантам и студентам старших курсов технических вузов.

Академик Национальной Академии Наук Украины
В. Г. Барьяхтар

Как все хорошие девушки уже разобраны и замужем, так и все хорошие задачи решены. И вряд ли я найду что-нибудь достойное среди оставшихся.

Л. Д. Ландау, 1929 г.

В науке, на определенном этапе развития новых фундаментальных представлений, эрудиция не является той основной чертой, которая позволяет ученому решать задачу, тут главное – воображение, конкретное мышление и в основном смелость.

П. Л. Капица, 1966 г.

Чрезмерный объем научных знаний ученого может явиться тормозом для его творческой деятельности, когда начинает казаться, что все до него уже сделано. Часто новое открывает человек, не отягченный чрезмерно большими знаниями.

А. Ю. Ишлинский, 1978 г.

Предисловие автора к препринту пособия

Высказывания знаменитых ученых по поводу непосильного бремени научной эрудиции, часто вызывающей упадочные настроения, особенно злободневны в нынешний период стремительного нарастания информационного потока.

С сомнениями молодого Л. Д. Ландау, взятыми в качестве эпиграфа, созвучны и те упреки, которые пришлось услышать автору этих строк от высокоэрудированных специалистов в области механики деформируемого твердого тела в процессе их первого знакомства с основными положениями, излагаемыми в учебном пособии. В подытоженном виде эти упреки сводятся к тому, что механика вообще и теория упругости в частности, как фундаментальная наука, уже исчерпала себя, поскольку ее основные принципы были сформулированы еще в 18-19 в. в. и временем подтвердили свою незыблемость. Из фундаментальной развивающейся науки механика якобы давно превратилась в консервативную, прикладную область знаний, о чем, например, свидетельствует содержание и даже само название международного журнала «Прикладная механика», издаваемого Национальной Академией Наук Украины. Поэтому пересмотр фундаментальных устоев механики, который якобы навязывает автор пособия, по мнению профессионалов – дело неблагодарное, а скорее всего – удел дилетантов и авантюристов.

Для такого сорта эпитетов и оценок, видимо, сам автор дал повод вызывающими, по мнению некоторых профессионалов, названиями своих статей: «Парадоксы классических решений волнового уравнения», «Парадоксальные особенности фундаментальных классических уравнений динамики деформируемых сред», «Сомнительные принципы подхода к

отождествлению переменных Эйлера и Лагранжа в динамике деформируемых сред». К тому же в двух последних работах опровергалось казавшееся незыблемым и вошедшее во многие учебники фундаментальное положение о величине погрешности уравнений Ламе, которые по общему мнению, при записи в переменных Лагранжа якобы позволяют корректно избежать нелинейности, т. е. избавиться от конвективных членов. Убежденность специалистов в незыблемости этого фундаментального положения привела в конечном итоге к тому, что в некоторых авторитетных университетских учебных пособиях по механике деформируемого твердого тела переменные Эйлера даже не упоминаются.

Наряду с упомянутым автором было показано, что многие общеизвестные точные решения классических задач, вошедшие в качестве типовых в учебники по математической физике, теории колебаний и др., содержат серьезные противоречия, бессмысленны с физической точки зрения и поэтому непригодны для практического применения, а следовательно, и в учебном процессе. Однако необходимо отдать должное большинству профессионалов, сперва отрицательно воспринявших суждения автора, за терпение, способность разобраться по существу, за проявленное мужество после длительных дискуссий все же принять точку зрения автора.

Прежде всего автор выражает глубокую признательность специалистам, внимательно изучившим отдельные из упомянутых работ и предоставившим письменные рецензии, а именно: заведующему кафедрой теоретической и прикладной механики Киевского Национального университета им. Тараса Шевченко, д. ф.-м. н., проф. Мелешко В. В., заведующему отделом института механики НАНУ, д. ф.-м. н., проф. Каюку Я. Ф., профессору кафедры высшей математики Национального технического университета Украины “КПИ”, д. ф.-м. н. Вирченко Н. А., ведущему научному сотруднику института механики НАНУ, д. ф.-м. н. Плахтиенко М. П. и старшему научному сотруднику, к. т. н. Антонюку Е.Я., научному сотруднику института математики НАНУ, к. ф.-м. н. Щепанюку Г. В.

Автор весьма признателен и специалистам, которые внимательно познакомились с его работами, а после дискуссий и многократного обсуждения поддержали выводы и предложения рецензентов или же сформулировали свое особое мнение: чл.-корр. НАНУ Матвееву В. В. (институт проблем прочности НАНУ), чл.-корр. НАНУ ГорбачукуМ.Л. и д. ф.-м. н., проф. Троценко В. А. (институт математики НАНУ), акад. АН Высшей школы, д. ф.-м. н., проф. Горошко О. А. и д. ф.-м. н., проф. Самойленко В. Г. (Киевский Национальный университет им. Тараса Шевченко), д. ф.-м. н., проф. Селезову И. Т. (институт гидромеханики НАНУ), д. т. н., проф. Павловскому М. А. (Национальный технический университет Украины “КПИ”).

Автор выражает признательность чл.-корр. НАНУ Локтеву В. М., д. ф.-м. н., проф. Джежере Ю. И., д. т. н., проф. Василенко Н. В. (Национальный технический университет Украины “КПИ”), принявших активное участие в обсуждении отдельных публикаций или же представивших свои рекомендации.

Автор признателен и тем специалистам, которые проявили внимание к публикациям, за многочисленные дискуссии в процессе личных встреч по затронутым проблемам: акад. НАНУ Гринченко В. Т. (институт гидромеханики НАНУ), чл.-корр. НАНУ Шульге Н. А. (институт механики НАНУ), чл.-корр. НАНУ Улитко А. Ф. (Киевский Национальный университет им. Тараса Шевченко).

Внимание и доброжелательность по отношению к автору, организация рецензирования публикаций, а также их обсуждение директором института математики НАНУ, акад. Самойленко А. М, деканом механико-математического факультета Киевского Национального университета им. Тараса Шевченко, чл.-корр. НАНУ Перестюком Н. А., проректором Национального технического университета Украины “КПИ”, чл.-корр. НАНУ Ильченко М. Е. вызывают у автора чувство глубокой благодарности.

Автор благодарен директору института механики НАНУ акад. Гузю А. Н. за любезное предложение и предоставленную возможность изложить свои взгляды в докладе на общеинститутском семинаре.

Особую признательность автор выражает научному редактору, декану физико-математического факультета Национального технического университета Украины “КПИ”, акад. НАНУ Барьяхтару В. Г. за предложение подготовить учебное пособие, за поддержку и за большой труд по его редактированию.

Если это и покажется противоречащим истине, то мы должны, однако, больше доверять вычислениям, чем нашему рассудку.

Л. Эйлер

Как часто мы наблюдаем, что ученые, старея, становятся в оппозицию к новым теориям.

П.Л. Капица

Математики или люди с математическим складом ума часто при «изучении» физики теряют физику из виду и впадают в заблуждение.

Р. Фейнман

Науку и технику надо изображать не как склад готовых открытий и изобретений, а как арену борьбы.

В.О. Ключевский

Предисловие автора к расширенному изданию учебного пособия

Высказывания Л. Эйлера и Р. Фейнмана, приведенные совместно в качестве эпиграфа, проливают свет на одну из возможных причин возникновения тех загадочных недоразумений, которые совершенно случайно удалось обнаружить в теории распространения волн в упругих средах. Причем, теперь эти недоразумения уже очевидны. Однако приходится удивляться, почему они, незамаскированные, а теперь уже хорошо заметные как находящиеся на поверхности, не были обнаружены на протяжении столь продолжительного времени? Как можно допустить несовместимость общепринятой, излагаемой даже в учебниках для средней школы, физической интерпретации и математической постановки конкретной задачи? Почему такая несовместимость присуща не как исключение одной-двум задачам, а встречается во многих простейших типовых примерах, которые уже давно вошли в учебники различных курсов для высших учебных заведений и по существу стали классическими?

Чтобы и дальше не оставлять читателя в неведении, о чем идет речь, напомним хорошо и давно известный из опыта факт, что возмущения в упругой среде распространяются не мгновенно, а с определенной скоростью, именуемой скоростью звука. Поэтому при математической постановке соответствующих задач эту весьма существенную особенность, несомненно, следовало бы как-то учитывать. И вряд ли об этом стоило напоминать, если бы на практике все было бы именно так. Напротив, банальная истина о том, что возмущение в сплошных средах распространяется со скоростью звука хотя часто [1 (см. ч.2)] и оговаривается, но тут же, при математической постановке задачи, почему-то ускользает из поля зрения. Авторитет наших выдающихся предшественников, давших науке классические решения этих задач, видимо, оказался тем непосильным грузом, который на протяжении более ста лет не позволял даже предположить о возможности появления ошибочных результатов. И действительно, утверждать, что точные решения большинства задач, посвященных колебаниям стержней, в знаменитой книге С.П. Тимошенко [2 (см. ч.2)] содержат серьезные математические противоречия и зачастую физически бессмысленны, могут, казалось бы, только абсолютные невежды. На самом же деле, и это уже признали многие специалисты, ситуация сложилась именно так.

С момента публикации первой статьи «Парадоксы классических решений волнового уравнения» в 2000 г. прошло достаточно много времени. Первоначальные категорические утверждения оппонентов по поводу нелепости основных ее положений и выводов уже остались позади. Процесс признания прошел все три традиционных этапа: категорическое

отрицание, постепенное восприятие и, наконец, отрицание существенной роли автора в формулировании, сперва казавшихся нелепыми, выводов.

В материалах X Международной конференции им. акад. Кравчука (см. Козачок А.А. Сомнительное наследие эпохи великих математиков. Киев, 2004 г., с. 686), а также в [29 (см. ч. 2)] уже освещены причины упомянутых выше противоречий классических решений. И многие специалисты, ознакомившись с этими причинами, несомненно, с огорчением заметили, что и они, и их коллеги тоже пошли по такому же, как и предшественники, традиционному, но ложному пути. При решении более сложных, современных задач о свободных колебаниях механических систем начальные условия тоже обычно отождествляются с теми условиями, которые свойственны механической системе в статическом состоянии, когда на систему еще действуют удерживающие силы. И то, что после устранения удерживающих сил статическая картина коренным образом изменяется, а возмущенная область охватывает систему постепенно, т.е. расширяется со скоростью звука, почему-то упускают из виду при математической постановке задачи. Забывают почему-то и о хорошо известной проблеме связанных упругих полей, которая в задачах такого типа осложняется тем, что упругие поля имеют переменные границы. Упускают из виду и то, что общая граница этих упругих полей перемещается со скоростью звука. А это, в свою очередь, приводит к перераспределению массы между возмущенной и невозмущенной областями тоже с такой же скоростью.

Упомянутое выше фактически означает, что пересмотру подлежат не только простейшие классические задачи, вошедшие в качестве типовых в учебники по различным дисциплинам. По мнению некоторых рецензентов, пересматривать необходимо и необозримое множество задач, решения которых накапливались на протяжении десятилетий многими научными учреждениями. Такая перспектива некоторых, особо влиятельных ученых, научный багаж которых базируется на устаревших ошибочных представлениях, разумеется, мало устраивает. Именно поэтому первоначальная поддержка внедрения упомянутых выше положений в учебные пособия по различным дисциплинам в ряде случаев сменилась на жесткое, но молчаливое сопротивление. Сложившуюся ситуацию по этому поводу наилучшим образом характеризуют высказывания П.Л. Капицы и В.О. Ключевского, приведенные в качестве эпиграфа.

И тем не менее, благодаря поддержке Министерства образования и науки Украины, с первой частью учебного пособия уже ознакомились специалисты ведущих отечественных и зарубежных вузов. Многие из них представили свои отзывы и замечания, которые в ряде случаев имеют оттенок достаточно жесткой дискуссии с автором.

Отзывы поступили из Львовского национального университета (доц. Галазюк В.А.), из Днепропетровского национального университета (проф. Ободан Н.И.), из Львовского института физической оптики (проф. Влох Р.О.), из Киевского национального университета им. Тараса Шевченко (проф. Мольченко Л.В.), из Харьковского национального университета им. В.Н. Каразина (проф. Адаменко И.Н).

Министерству образования и науки Украины была направлена рецензия на учебное пособие также Министерством образования республики Беларусь. Рецензию подготовили специалисты Белорусского государственного университета: декан механико-математического факультета проф. Юрчук Н.И., заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики проф. Журавков М.А. и профессор кафедры Мартыненко М.Д.

Автор с удовлетворением и с чувством благодарности за проявленный интерес к пособию хотел бы засвидетельствовать свое глубокое уважение всем упомянутым выше

специалистам независимо от их оценок и занимаемых позиций, которые, даже вступая в противоречие с позицией автора, оказывают большую услугу в установлении научной истины, не говоря уже об устранении методических упущений и досадных опечаток.

И в заключение автор с чувством искренней благодарности считает своим долгом отметить, что излагаемые в учебном пособии научные результаты впервые освещались на ежегодных Международных конференциях «Гидроаэромеханика в инженерной практике» в 2000–2005 г. благодаря исключительно доброжелательному отношению и поддержке бессменного председателя оргкомитета конференции проф. Яхно О.М.

Для правильного обучения современной молодежи нужно воспитывать в ней творческие способности… Это фундаментальная задача, от решения которой может зависеть будущее нашей цивилизации не только в одной стране, но и в глобальном масштабе, задача не менее важная, чем проблема мира и предотвращения атомной войны.

П. Л. Капица

Введение

Усвоение содержания учебного пособия, предлагаемого вниманию читателя, требует предварительного изучения курса механики сплошной среды в объеме минимальной вузовской программы.

Поскольку в первой части пособия излагаются материалы преимущественно критического характера, которые были опубликованы впервые в 2001–2004 г. г., то вполне естественно, что читатель не сможет найти упоминания о них в общеизвестных университетских курсах.

Пособие предназначено не только для студентов, но и для преподавателей, освоение которыми освещаемых в нем новых положений, идущих вразрез с общепринятыми, будет способствовать скорейшему реформированию изложения курса механики сплошных сред. И поскольку новые положения затрагивают фундаментальные аспекты механики сплошных сред – ее основные уравнения, то существенному реформированию подлежат и некоторые разделы других дисциплин, которые используют и развивают упомянутые, подвергшиеся пересмотру, аспекты. В первую очередь такое реформирование, очевидно, затронет, хотя и в разной степени, курсы математической физики, теории упругости, теории колебаний, сопротивления материалов, строительной механики.

Освещаемые в учебном пособии положения в ряде случаев не являются абсолютно новыми в широком смысле, поскольку иногда речь идет о пересмотре значимости известных фактов там, где, по общепризнанному и устоявшемуся на протяжении нескольких веков мнению, они считались несущественными. В данном случае имеются в виду конвективные члены в выражении для ускорения, записанного в

эйлеровых переменных, безоговорочное пренебрежение которыми в гидродинамике, как известно, недопустимо, а в механике деформируемого твердого тела почему-то общепринято и считается незыблемым.

Пересмотр этого положения в механике деформируемого твердого тела означает не только девальвацию некоторой части необозримого множества разработок линейной теории упругости, но и необходимость развития тех ее нелинейных аспектов, которые в настоящее время находятся лишь в зачаточном состоянии и традиционно считаются бесполезными для практики, а по мнению многих профессионалов, даже несуществующими.

Характерной особенностью пособия является его направленность на развитие у читателя способностей критически воспринимать изучаемые теоретические положения и пытаться их переосмыслить даже в тех случаях, когда эти положения сформулированы нашими выдающимися предшественниками и представляются бесспорными. Именно поэтому изложение материала выполнено по принципу критического сопоставления со ссылками на первоисточник, в котором высказывается полярная точка зрения. Такой подход, по мнению автора, призван содействовать развитию у студентов задатков творческого мышления и в конечном итоге должен поставить хотя бы какой-то заслон на пути тех возможных дефектов образования, которые в свое время были замечены в университетской системе Великобритании,– “…это ее способность плодить так называемых “грамотеев”, т. е. людей, лишенных творческих задатков, но обладающих хорошей памятью и эрудицией. Эти люди в университете получают высокие ученые степени, но потом приносят очень мало пользы…” (Образованный ученый. Пер. с англ.– М.: Наука, 1979 – с. 16, 17, 37–41).

Основные проблемы, которые затрагиваются в пособии, относятся: к определению условий допустимости отождествления переменных Эйлера и Лагранжа в динамике деформируемых сред, к пересмотру границ применимости линейной теории упругости, к пересмотру многих точных решений классических задач, используемых в качестве типовых в курсах математической физики, теории колебаний и др.

Пособие содержит много примеров и контрольных вопросов, которыми завершается каждый пункт. На каждый вопрос читатель

сможет найти ответ на той или иной странице, но в процессе некоторого труда, связанного с необходимостью прочитать и комментарии к возможному ответу.

Для облегчения самостоятельной работы студентов и развития навыков литературного поиска большинство ссылок на литературные источники содержат и номера страниц, на которых расположены обсуждаемые формулы или научные положения, подвергнутые критике.

Первая часть пособия по сути дела лишь ставит на повестку дня целый ряд фундаментальных проблем нелинейной механики деформируемого твердого тела, причем таких, которые прежде считались несущественными или отсутствующими вообще. Подходы или же методы разрешения этих проблем изложены во второй части.

Некоторые разделы пособия, бесспорно, могут показаться дискуссионными. Но это и не удивительно, поскольку, как оказалось, они иногда уводят читателя к тому знаменитому, но незавершенному “спору о струне”, который на протяжении многих лет вели наши выдающиеся предшественники Даламбер, Эйлер, Д. Бернулли. И хотя к этому «спору» впоследствии присоединились Лагранж и Фурье, продолжить его, вероятно, суждено нам и, быть может, нашим преемникам.

Часть 1. Вопросы нелинейной динамики сплошных сред

Математика подобно жернову перемалывает то, что под нее засыпают, и, как засыпав лебеду, вы не получите пшеничной муки, так, исписав целые страницы формулами, вы не получите истины из ложных предположений.

Томас Хаксли

При изучении наук примеры полезнее правил.

И. Ньютон

1.1. Сомнительные нюансы общепринятого подхода к отождествлению переменных Эйлера и Лагранжа в динамике деформируемых сред

1.1.1. Общие положения

В теории малых статических деформаций [1] возможность отождествления переменных Эйлера и Лагранжа является общепризнанной и не вызывает сомнений. Однако, выполняя такое отождествление при динамическом режиме нагружения сплошной среды, почему-то нередко упускают из виду, что по крайней мере одна из пространственных координат x становится подвижной и зависит не только от начальной координаты x_0, но и от времени t, т. е. $x = x(x_0, t)$. Начальные координаты, как и в статике, могут выбираться с достаточным произволом в зависимости от принятой системы отсчета и обычно соответствуют неподвижному и недеформированному состоянию среды. Условие малости перемещений и деформаций как в статике, так и в динамике, позволяет с допустимой точностью считать и начальную, и сопутствующую (или иначе – актуальную [2]) системы координат декартовыми и с достаточным основанием отождествлять переменные Эйлера и Лагранжа, т. е. в окончательных, используемых для численной реализации, формулах при необходимости принимать $x \approx x_0$. Упомянутое, однако, совершенно не означает появление такой же возможности отождествления для дифференцируемых величин и

$$\frac{d^2u}{dt^2}\left(1-\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\left(\frac{du}{dt}-a\right)^2\varphi''+\left(\frac{du}{dt}+a\right)^2\psi''. \qquad (1.4.9)$$

Таким образом, первая формула (1.4.9) фактически совпала с полученной другим, более общим, способом формулой (1.3.4) и вместе с (1.3.5) отчетливо подтверждает, что только при условии $\partial u/\partial x >> 1$, $du/dt << a$ можно полагать справедливость приближенного соотношения

$$\frac{d^2u}{dt^2}\approx a^2\left(\varphi''+\psi''\right)=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad (1.4.9, а)$$

Тогда общее решение нелинейного однородного волнового уравнения (1.4.6, а) в ряде случаев действительно может быть представлено в виде (1.4.7). Наряду с этим из первой формулы (1.4.8) также следует, что для предположения $du/dt \approx \partial u/\partial t$, но применительно к волновому уравнению, требуется соблюдать не только условие $\partial u/\partial x >> 1$, но и требование $dx/dt << a$.

Попытаемся теперь дать более строгую количественную оценку требованию $\dot{u} << a$. С этой целью, имея в виду выражение $\partial^2 u/\partial t^2 = a^2\left(\psi''+\varphi''\right)$, преобразуем правую часть второй формулы (1.4.9), а именно:

$$\frac{d^2u}{dt^2}\left(1-\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\dot{u}^2\left(\varphi''+\psi''\right)+2a\dot{u}\left(\psi''-\varphi''\right). \qquad (1.4.9, б)$$

Определим весомость двух нелинейных членов по сравнению с $\partial^2 u/\partial t^2$ и запишем отношение нелинейной части к линейной

$$\delta=\frac{\dot{u}^2\left(\psi''+\varphi''\right)+2a\dot{u}\left(\psi''-\varphi''\right)}{a^2\left(\psi''+\varphi''\right)}=\frac{\dot{u}^2}{a^2}+2\frac{\dot{u}}{a}\frac{\psi''-\varphi''}{\psi''+\varphi''}. \qquad (1.4.10)$$

Легко заметить, что с учетом выражений для $\partial u^2/\partial x^2$ и $\partial u/\partial t$ согласно (1.4.8) соотношение (1.4.9, б) превращается в (1.3.6), которое получено хотя и более общим, но и более сложным путем.

Если $\dot{u}/a << 1$ то первым членом в (1.4.10) можно пренебречь и тогда

$$\delta=2\frac{\dot{u}}{a}\frac{\psi''-\varphi''}{\psi''+\varphi''}. \qquad (1.4.10, а)$$

При одностороннем распространении упругой волны решение (1.4.7), как известно [13, стр. 393], можно представить в виде $u = \overline{\varphi}(x \pm at)$. Если при таком представлении решения сопоставить выражения для частных производных $\partial u / \partial t$ и $\partial u / \partial x$, то получим обязательное ограничение величины скорости

$$\dot{u} = \pm a \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad (1.4.10, б)$$

и поэтому согласно (1.4.10) имеем $\delta = 2\dot{u} / a = \pm 2\partial u / \partial x$.

Такой подход позволяет произвести достаточно корректную оценку отброшенной нелинейной составляющей после получения решения линейного однородного волнового уравнения. Однако подобная оценка погрешности уравнения еще не означает, что она адекватна погрешности самого решения. Определение такой погрешности с достаточной достоверностью возможно, если известно какое-нибудь решение нелинейного уравнения.

Из соотношения (1.4.10, б) также вытекает чрезвычайно важное следствие, которое состоит в следующем. Общее решение $u = \pm\overline{\varphi}(x_0 \pm at)$ удовлетворяет волновому уравнению (1.4.5), записанному в переменных Лагранжа при $F = 0$, когда конвективная составляющая отсутствует. Для этого случая (1.4.10, б) тоже остается в силе, если положить $x = x_0$, что фактически означает $\dot{u} / a = \pm\partial u / \partial x_0$. Поэтому при постановке задач для линейного волнового уравнения следует иметь в виду, что получаемые решения справедливы, если величина $\dot{u} / a$ такого же порядка как и $\partial u / \partial x << 1$.

Нелинейное уравнение (1.4.6, а) с учетом (1.3.6) после исключения в выражениях $1 - \partial u / \partial x$ второго члена легко приводится к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - a^2\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F, \qquad (1.4.11)$$

а затем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(M^2\right) + \left(M^2 - 1\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] = F, \quad M = \frac{\partial u / \partial t}{a}, \qquad (1.4.12)$$

где M – число Маха, поскольку согласно (1.3.5) $\partial u / \partial t \approx \dot{u}$ (хотя при последующем дифференцировании это приближение использовать недопустимо!).

Преобразование (1.4.6, а) в (1.4.11), (1.4.12) фактически подразумевает переход от подвижных координат к фиксированным, т. е. по сути к переменным Эйлера, поскольку частные производные в (1.4.11) по одной из переменных означают, что дифференцирование производится при фиксированной второй переменной.

1.4.5. Противоречия вывода классического уравнения колебаний струны

Выводом знаменитого уравнения колебаний струны (1.4.13) занимались еще Б. Тейлор и И. Бернулли, но записать его в современной общеизвестной форме удалось только в 1747 г. Даламберу, а через год – Эйлеру. С тех пор это уравнение, вошедшее в обиход под названием волнового, заняло прочное место в учебниках по математике, математической физике, теории колебаний, а также других математических дисциплин и по сути стало считаться классическим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \overline{a}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \overline{a}^2 = \frac{T_n}{\overline{\rho}}, \tag{1.4.13}$$

где T_n – начальное натяжение струны; $\overline{\rho}$ – погонная плотность.

При этом сформировалась и закрепилась в учебниках общепринятая точка зрения, что волновое уравнение с необходимой точностью описывает процесс одномерных колебаний струны при достаточно малых ее отклонениях от положения равновесия. Предположение о малых отклонениях и, разумеется, углах отклонения к тому же почему-то стали считать достаточным условием установления практически не зависящего ни от времени, ни от координат натяжения струны [6]. Любопытно, что никого не насторожил очевидный факт отсутствия возможности описать с помощью этого уравнения колебания струны без ощутимого начального натяжения, когда $T_n = 0$. Осталось почему-то незамеченным и то, что малые отклонения могут вызвать такие натяжения струны, которые окажутся соизмеримыми с ее начальным натяжением. В таком случае предположение о неизменном натяжении

струны окажется ошибочным, а уравнение ее колебаний, по-видимому, должно быть иным.

Рассмотрим достаточно малый элемент dl отклоненной от состояния равновесия струны (рис. 1.2). Будем полагать, что указанный элемент находится под действием сил инерции $\overline{I} = -I$, сил натяжения T, сил тяжести G и, возможно, каких-либо других, распределенных по длине струны, объемных сил q.

Будем полагать, что струна совершает только одномерные колебания вдоль оси y и поэтому

$$dI = \overline{\rho} dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad u = u(x,t), \tag{1.4.14}$$

где $u = y$ – отклонение материальной точки струны от состояния покоя.

Сила натяжения струны $T = T_n + T_0$ состоит из двух частей, а именно: постоянной силы T_n начального натяжения и переменной силы T_0, возникающей за счет отклонения.

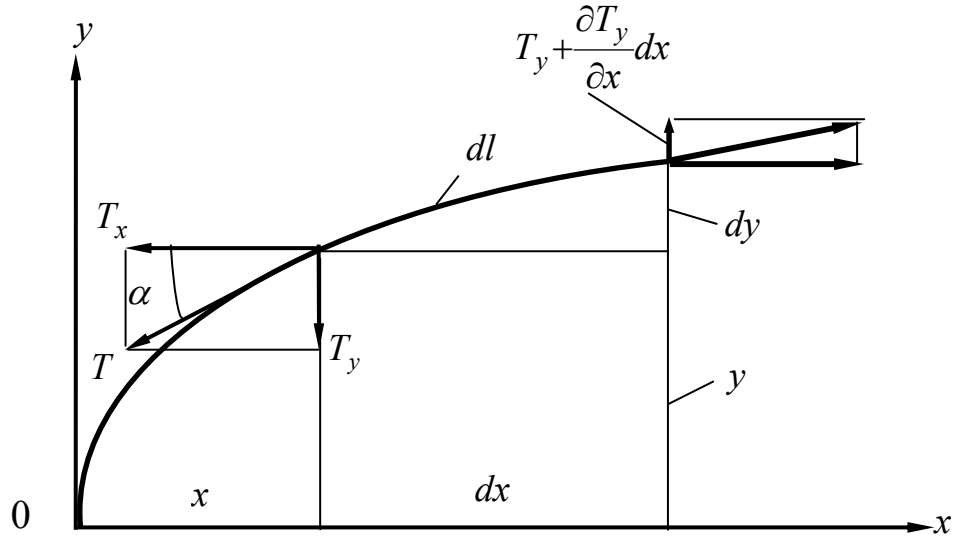

Рис. 1.2. К выводу уравнения колебаний струны

Если струна изготовлена из идеально упругого вещества, то

$$T_0 = E\varepsilon S, \tag{1.4.15}$$

где ε – продольная деформация (относительное удлинение) за счет отклонения струны.

Продольную деформацию можно определить двумя способами, а именно:

$$\varepsilon_L = \frac{dl - dx}{dx}, \quad \varepsilon_E = \frac{dl - dx}{dl}. \tag{1.4.16}$$

Имея в виду, что согласно рис. 1.2

$$dl = \frac{dx}{\cos\alpha}, \quad dx = dy \operatorname{ctg}\alpha,$$

из (1.4.16) соответственно имеем

$$\varepsilon_E = 1 - \cos\alpha, \quad \varepsilon_L = \frac{1 - \cos\alpha}{\cos\alpha}. \tag{1.4.17}$$

В случае малых отклонений струны принято полагать, что малым будет и угол отклонения, и поэтому оба определения деформации практически совпадают, т.е.

$$\varepsilon_E = \varepsilon_L = 1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha^2}{2}. \tag{1.4.18}$$

Таким образом, согласно (1.4.15) и рис. 1.2

$$T = T_n + SE\frac{\alpha^2}{2} \Rightarrow T_y = T\sin\alpha \approx T_n\alpha + SE\frac{\alpha^3}{2}, \tag{1.4.19}$$

и поэтому

$$dT_y = \frac{\partial T_y}{\partial x}dx = \left(T_n + \frac{3ES}{2}\alpha^2\right)\frac{\partial\alpha}{\partial x}dx. \tag{1.4.20}$$

При малых углах отклонения имеют место такие общепринятые приближения

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha \approx \sin\alpha \approx \alpha$$

и тогда из уравнения (1.4.20) имеем

$$dT_y = \left(T_n + \frac{3ES}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx. \qquad (1.4.21)$$

В соответствии с принципом Даламбера

$$dI = dT_y + Gdx + qdx,$$

$$\overline{\rho}\, dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(T_n + \frac{3ES}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx + Gdx + qdx, \qquad (1.4.22)$$

откуда следует

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(\overline{a}^2 + \overline{c}^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x,t), \qquad (1.4.23)$$

$$\overline{a}^2 = \frac{T_n}{\overline{\rho}}, \quad \overline{c}^2 = \frac{3}{2} a^2, \quad a^2 = \frac{E}{\rho}, \quad \rho = \frac{\overline{\rho}}{S},$$

где ρ – действительная плотность вещества струны.

Из (1.4.23) вытекает, что в случае малого начального натяжения струны можно положить $\overline{a} \approx 0$. Если же выполняется условие $T_n >> T_0$, $\alpha^2(x,t) \approx 0$, то лишь в этом случае уравнение колебаний струны приобретает общеизвестный вид (1.4.13).

1.4.6. Общие выводы

Таким образом, достаточно распространенная или даже общепринятая точка зрения [2, стр. 176; 10, стр. 23, 40], что уравнения механики деформируемого твердого тела могут быть изначально записаны с точностью до малых первого порядка в лагранжевой системе x_0, t не соответствует действительности и требует пересмотра. Как вытекат из рассмотренного выше, уравнение (1.4.6, а) фактически записано, причем корректно, в особой системе координат, когда правая его часть определяется при фиксированной временной координате t, а левая – с учетом изменения зависимой переменной $x = x(x_0,t)$. Переход к переменным Лагранжа x_0, t, а если говорить точнее, то общепринятая безоговорочная запись уравнений фактически производится путем некорректной повсеместной подмены подвижных координат x на неподвижные x_0 без учета допустимости приближенного равенства

$x \approx x_0$ в конкретных условиях. Переход же к переменным Эйлера происходит автоматически путем раскрытия выражения для полной производной d^2u / dt^2, в результате чего подвижная координата $x(x_0,t)$ становится фиксированной. При этом следует обратить особое внимание на отличие фиксированных координат x от неподвижных x_0. Фиксированные координаты можно рассматривать, как координаты неподвижных точек пространства, совпадающих с координатами подвижных материальных частиц. Однако, при определении частной производной $\partial u\left(x(x_0,t),t\right)/\partial t$ зависимость $x(x_0, t)$ попросту не учитывается, т. е. x фиксируется точно так же, как и время t считается неизменным при определении частной производной $\partial u\left(x,t\right)/\partial x$. Эти замечательные особенности эйлеровых переменных x, t создают возможность представить процесс деформирования в фиксированной системе координат, т.е наблюдать за поведением подвижных частиц в неподвижных точках пространства.

Безоговорочная запись уравнений движения в лагранжевых переменных в классических трудах наших выдающихся предшественников [11, стр. 30, и др.], по видимому, и привела к тому, что в современных университетских курсах по механике деформируемого твердого тела [14] она стала безальтернативной и поэтому переменные Эйлера даже не упоминаются.

Насколько осторожно следует относится к отождествлению переменных Эйлера и Лагранжа свидетельствует такая, казалось бы, вполне допустимая процедура: если в (1.4.6, а) произвести замену x на x_0 то сразу же из нелинейного уравнения получим линейное (1.4.5), и наоборот – замена x_0 на x в (1.4.5) приводит к существенному усложнению в виде нелинейного уравнения. Поэтому, если исходить из рассмотренной в п. 1 допустимости отождествления переменных Эйлера и Лагранжа, то это не означает автоматическое появление такой же возможности для дифференцируемых величин и особенно для производных по времени t. Именно эта весьма существенная особенность, обычно выпадает из поля зрения и, несмотря на всю ее очевидность, не учитывается при записи основных уравнений в переменных Лагранжа [1, 7, 11 и др.]. В конечном итоге это и привело к устойчивому заблуждению, что в теории малых деформаций среды «метод Лагранжа приводит к весьма простым и наглядным

результатам» [1, стр. 57] в виде линейных уравнений движения. На самом же деле сомнительная простота связана с подменой дифференцирования по подвижной координате x дифференцированием по не зависящей от времени координате x_0.

Исходя из условия $x \approx x_0$ и имея в виду, что фиксированные в (1.1.11) координаты x фактически соответствуют неподвижным координатам пространства, напрашивается вывод о совпадении по форме уравнений движения в эйлеровых и лагранжевых переменных после замены x на x_0 в (1.4.11). Однако, такая замена сама по себе бессмысленна, поскольку символы x_0 в этом случае означают не истинные начальные координаты материальных частиц, находящихся в момент времени t в точках пространства с координатами x, а какие-то близкие к ним координаты других материальных частиц, которые тоже следует считать подвижными. Действительные начальные координаты следует, очевидно, определять по формуле $x_0 = x - u$ после решения уравнения (1.4.11).

Вне всяких сомнений, что нелинейные члены в (1.4.12) могут быть опущены при условии $M^2 << 1$, $\partial(M^2)/\partial x << \partial^2 u/\partial x^2$. Однако, когда только $M^2 << 1$, а $\partial^2 u/\partial t^2 \approx 0$, то нелинейный член становится определяющим и переход к линейному уравнению недопустим.

При опускании нелинейных членов особое внимание следует обратить на то, что они должны быть малыми по сравнению с наименьшим членом, который остается в уравнении. Поэтому оценивать весомость нелинейных членов по отношению к $\partial^2 u/\partial t^2$ можно только в однородном уравнении (1.4.6, б). Что касается неоднородного уравнения, когда $F \neq 0$, то такое же сопоставление может оказаться ошибочным.

Таким образом, недоразумения, связанные с кажущейся корректностью записи (1.4.5), обусловлены необоснованной, безоговорочной заменой подвижных координат x неподвижными x_0 с вытекающими отсюда последствиями, когда полная производная по времени в результате трудноуловимых манипуляций превращается в частную, создавая обманчивую видимость простоты записи уравнений движения в лагранжевых переменных.

Как вытекает из п. 1.4.5, традиционное линейное уравнение колебаний струны тоже имеет более ограниченную, чем принято считать, область применения. Малый угол отклонения является лишь

необходимым условием применимости уравнения. Но только при большом предварительном натяжении это условие оказывается достаточным. В противном случае уравнение колебаний струны становится нелинейным. Решение такого уравнения представляет собой самостоятельную проблему.

1.4.7. Примеры

Пример 1. Определить в соответствии (1.4.3) характер внешней нагрузки $F = (x,t)$, которая обеспечивает заданный в переменных Лагранжа закон движения материальных частиц в таком виде $u(x_0,t) = A\cos\frac{\omega}{a}x_0\cos\omega t.$

Подставим выражение для $u(x_0,t)$ в (1.4.3)

$$-A\omega^2\cos\frac{\omega}{a}x_0\cos\omega t = -a^2\frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{\omega}{a}\sin\frac{\omega}{a}x_0\cos\omega t\right) + F(x,t).$$

Поскольку выражение в скобках

$$-A\frac{\omega}{a}\sin\frac{\omega}{a}x_0\cos\omega t = \frac{\partial u(x_0,t)}{\partial x_0} = \frac{\partial x}{\partial x_0} - 1,$$

то, осуществляя его замену, получим

$$-A\omega^2\cos\frac{\omega}{a}x_0\cos\omega t = -a^2\frac{\partial^2 x}{\partial x\partial x_0} + F(x,t).$$

Если оператор $\partial/\partial x$ заменить на $\partial/\partial x_0$, то из первого соотношения получим:

$$-A\omega^2\cos\frac{\omega}{a}x_0\cos\omega t = -A\omega^2\cos\frac{\omega}{a}x_0\cos\omega t + F(x,t) \Rightarrow F(x,t) = 0.$$

Из сравнения обоих результатов видно, что перестановка операций дифференцирования в выражении $\partial^2 x/\partial x\partial x_0$, вероятно, недопустима.

Пример 2. Определить ограничения, которые необходимо наложить на решение однородного волнового уравнения (1.4.5), полученное в виде $u(x_0,t) = A\sin\frac{\omega}{a}(x_0 - at)$, т. е. в переменных Лагранжа x_0, t.

Вычислим производные $\partial u/\partial x_0$ и $\partial u/\partial t$

22. При каком условии формулы для определения продольных деформаций струны приводят практически к одинаковому результату?
23. Запишите приближенную взаимосвязь между продольной деформацией струны и углом ее отклонения.
24. Запишите основные приближения, которые используются при выводе уравнения колебаний струны при малых углах отклонения.
25. Запишите уравнение колебаний струны, выведенное с учетом и предварительного натяжения, и натяжения за счет отклонения.
26. Поясните физический смысл коэффициентов в нелинейном уравнении колебаний струны.

1.5. Методология оценки погрешности трехмерных уравнений движения классической теории упругости (уравнений Ламе)

1.5.1. Общие положения

При записи уравнений Ламе в общепринятой векторной форме согласно [2, стр. 175]

$$(\lambda + G)\text{grad div}\vec{u} + G\nabla^2\vec{u} + \rho\overline{F} = \rho\ddot{\vec{u}}, \quad \lambda = \frac{2\nu G}{1-2\nu} \qquad (1.5.1)$$

полагают, что $\ddot{\vec{u}}$ есть вектор ускорения центра масс элементарного объема деформируемой упругой среды с модулем Гука – G, плотностью – ρ и коэффициентом Пуассона – ν.

Переходя к декартовой системе координат x_j, получают три скалярных уравнения

$$(\lambda + G)\frac{\partial\varepsilon_0}{\partial x_j} + G\nabla^2 u_i + \rho F_i = \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad \varepsilon_0 = \text{div}\vec{u}, (i = 1,2,3) \qquad (1.5.2)$$

и делают иногда оговорку [2, стр. 176; 5, стр. 513], что в случае, когда x_j являются переменными Эйлера, то опущенные конвективные члены в выражении для ускорения [2, стр. 39]

$$\frac{d^2u_i}{dt^2} = \frac{\partial\dot{u}_i}{\partial t} + \dot{u}_i\frac{\partial\dot{u}_i}{\partial x_i} + \dot{u}_j\frac{\partial\dot{u}_i}{\partial x_j} + \dot{u}_k\frac{\partial\dot{u}_i}{\partial x_k}, \quad \dot{u}_i = \frac{du_i}{dt} \qquad (1.5.3)$$

являются малыми величинами, которыми можно пренебречь.

Если же x_j считать переменными Лагранжа, а это якобы вполне допустимо, поскольку обусловлено возможностью отождествления эйлеровых и лагранжевых координат, то запись уравнений движения в виде (1.5.2) позволяет избежать необходимости оценки конвективных членов, отсутствующих вообще, как мы уже установили в п. 1.3., в выражении для ускорения. Именно это обстоятельство стало фундаментальным положением механики деформируемого твердого тела, благодаря которому ее нелинейные аспекты в упомянутом направлении на протяжении 19–20-го веков даже не обсуждались, видимо, как не существующие.

Если исходить из положения об отсутствии указанной проблемы, то конвективные члены при записи уравнений Ламе в переменных Эйлера действительно должны быть малыми величинами при любых обстоятельствах, когда $\partial u_i / \partial x_i << 1$ и перемещения тоже малы. Хотя, как мы уже видели, даже в одномерном случае это не так.

1.5.2. Представление общего решения уравнений Ламе

Попытаемся по аналогии с представлением общего решения одномерного волнового уравнения в виде (1.4.7) дать такое же представление и для уравний Ламе. С этой целью связанную систему (1.5.2) можно различными способами [6, стр. 439, 13, стр. 387] расщепить и свести к условно независимым трехмерным волновым уравнениям. Если принять $F_i = \text{const}$, то, полагая

$$\vec{u} = \operatorname{grad} \Phi + \operatorname{rot} \vec{A},$$

$$u_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad u_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad u_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}, \quad (1.5.4)$$

из уравнений (1.5.2) после подстановки этих выражений получим

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \frac{\lambda + 2G}{\rho} \nabla^2 \Phi = \frac{2G(1-\nu)}{\rho(1-2\nu)} \nabla^2 \Phi,$$

$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho} \nabla^2 \vec{A}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (1.5.5)$$

Как известно из векторного анализа [15, стр. 211], величины Φ и $\vec{A}$ называются скалярными и векторными потенциалами соответственно.

Следует также помнить, что второе уравнение (1.5.5) записано в векторной форме, и поэтому его можно представить в виде трех скалярных уравнений относительно компонент A_x, A_y, A_z.

Непосредственной подстановкой несложно убедиться, что общее решение произвольного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = a^2\nabla^2 u \qquad (1.5.6)$$

можно представить в виде

$$u = u_1 + u_2 + u_3 + u_L + u_L t,$$

$$u_1 = f_1\left(x \pm at + \lambda_x\right) + f_2\left(y \pm at + \lambda_y\right) + f_3\left(z \pm at + \lambda_z\right),$$

$$u_2 = \varphi_1\left(\frac{m_1 x + n_1 y}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2}} \pm at + \beta_1\right) + \varphi_2\left(\frac{m_2 x + n_2 z}{\sqrt{m_2^2 + n_2^2}} \pm at + \beta_2\right) +$$

$$+\varphi_3\left(\frac{m_3 y + n_3 z}{\sqrt{m_3^2 + n_3^2}} \pm at + \beta_3\right),\ u_3 = \psi\left(\frac{mx + ny + kz}{\sqrt{m^2 + n^2 + k^2}} \pm at + \beta\right), \qquad (1.5.7)$$

где u_1, u_2, u_3 – частные решения, каждое из которых удовлетворяет волновому уравнению при любой комбинации знаков перед at; u_L – общее решение уравнения Лапласа $\nabla^2 u_L = 0$; $f_{1-3}, \varphi_{1-3}, \psi$ - произвольные функции, дважды дифференцируемые по сложному (в скобках) и по независимым аргументам x, y, z, t; m_i, n_i, k_i – коэффициенты с произвольными действительными или комплексными значениями в том числе и виде интегральных (дифференциальных) выражений от параметров, не зависящих от x, y, z, t; $\lambda_i, \beta_i, \beta_i$ – параметры, не зависящие от x, y, z, t.

Необходимо иметь в виду, что общее количество членов, соответствующее $u_{1,2,3}$, фактически следует удвоить по сравнению с

(1.5.7), т. е. записать все члены со знаком плюс и со знаком минус при слагаемых at.

Нетрудно заметить, что из выражений для $u_{1,2,3}$ после подстановки $a = i = -1$ сразу же получаем представление общего решения четырехмерного уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \qquad (1.5.8)$$

Для трехмерного уравнения это представление, очевидно, будет таким:

$$u_L(x,y,z) = \overline{f}_1(x \pm iz + \lambda_x) + \overline{f}_2(y \pm iz + \lambda_y) + \overline{\psi}\left(\frac{mx + ny}{\sqrt{m^2 + n^2}} \pm iz + \beta\right). \qquad (1.5.9)$$

Если по очереди менять местами z на x или же на y, то полученные таким способом выражения тоже будут решениями уравнения Лапласа.

Следует заметить, что $u_L(x,y,z)$ представляет собой одно из так называемых тривиальных решений волнового уравнения (1.5.6), когда и левая, и правая его части, каждая в отдельности, равны нулю, т. е. $\partial^2 u_L / \partial t^2 = 0$ и $\nabla^2 u_L = 0$. Таким же условиям, по-видимому, удовлетворяет и другая функция $\overline{u}_L(x,y,z,t) = u_L t$, которая имеется в общем выражении (1.5.7). И, наконец, если быть последовательным, то из таких же соображений к общему решению необходимо еще добавить и решения всех трех двумерных волновых уравнений и уравнений Лапласа $u_L(x,y), u_L(x,z), u_L(y,z)$, а также соответствующие им произведения $u_L t$.

Представление общих решений в форме, преобразуемой к u_1 или u_3 при $\lambda_i = 0$, $\beta = 0$, предлагается в [16, 17]. Что же касается формы u_2, то в известных автору публикациях она не встречается. Не исключены, по-видимому, и другие формы. В [17], например, предложена интегральная форма общего решения, но с подынтегральной функцией, преобразуемой в u_3.

Если воспользоваться представлениями общих решений волновых уравнений (1.5.5) в виде (1.5.7) и подставить их в соотношения для скалярного Φ, и векторного $\vec{A}$ потенциалов согласно (1.5.4), а затем – в (1.5.2), то в конечном итоге получим представление общего решения уравнений Ламе. Однако, легко подсчитать, что только частные

оценки, приведенные в п. 1.5.3, без особых опасений допустимо распространить и на этот случай. Что касается более точных оценок, то их тоже можно получить, поскольку уравнения (1.5.2) отличаются от волновых только наличием члена $\frac{1}{\rho}(\lambda + G)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\vec{u}$. Однако наличие в этом члене и двух других компонент перемещения приводит к достаточно громоздким преобразованиям, и поэтому получение уточненных оценок становится малоэффективным.

1.5.5. Контрольные вопросы

1. Расскажите о методе приведения уравнений Ламе к волновым уравнениям.
2. Какое количество волновых уравнений получается в случае приведения к ним уравнений Ламе?
3. В каком виде можно представить общее решение волнового уравнения?
4. Каким способом можно получить общее представление решения уравнения Лапласа?
5. Удовлетворяет ли решение уравнения Лапласа волновому уравнению?
6. Расскажите о методе оценки погрешности трехмерного волнового уравнения.
7. Каким способом можно сразу записать развернутое выражение для $d^2u_i(x,y,z,t)/dt^2$, не прибегая к сложным преобразованиям?
8. При каких условиях возможен переход от нелинейного к линейному волновому уравнению в трехмерном случае?
9. Сформулируйте особенности оценки погрешности линейных уравнений Ламе, исходя из погрешности волнового уравнения.

1.6. Парадоксы классических решений волнового уравнения

Задачи о продольных колебаниях стержня стали уже классическими. Без них не обходятся учебные пособия по математической физике [19], теории колебаний [8, 13] и др. Большое количество задач о колебаниях стержня, решения которых считаются точными, имеется в знаменитой книге [12], ставшей настольной у инженеров, научных работников и

педагогов. Однако тщательный анализ таких решений [20], представленных в виде бесконечных рядов, приводит к парадоксальным выводам, заставляющим усомниться в их достоверности. При этом установлено, что следствия, вытекающие из этих решений, противоречат установившимся представлениям о физической картине механических колебаний и содержат неувязки математического характера.

1.6.1. Свободные продольные колебания стержня

Задача о свободных колебаниях стержня по праву занимает первое место и во многих учебных пособиях, и в классическом труде [12].

Согласно [12, стр. 327–329], решение задачи о продольных свободных колебаниях стержня с одним закрепленным концом (рис.1.3)

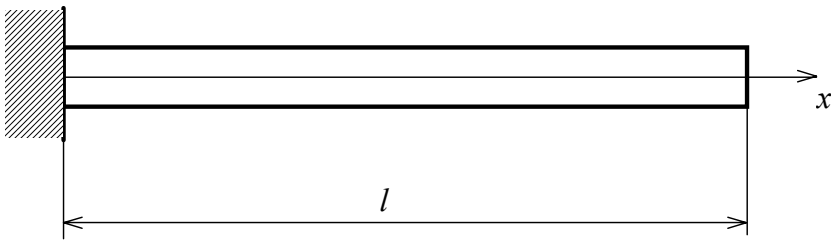

Рис. 1.3. К расчету свободных колебаний стержня с одним закрепленным концом

при начальных и граничных условиях

$$u(x,0)=\varepsilon_0 x,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0,$$

$$u(0,t)=0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(l,t)=0 \qquad (1.6.1)$$

имеет такой вид:

$$u=\frac{8\varepsilon_0 l}{\pi^2}\sum_{i=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{(-1)^{(i-1)/2}}{i^2}\sin\frac{i\pi x}{2l}\cos\frac{i\pi a t}{2l}, \qquad (1.6.2)$$

где ε_0– начальная деформация, которая является однородной, поскольку $\partial u(x,0)/\partial x=\varepsilon_0$.

Условия (1.6.1), очевидно, по предположению автора задачи, соответствуют случаю, когда к свободному концу стержня была приложена растягивающая или сжимающая сила в статическом режиме,

благодаря чему стержень оказался подвергнутым однородной деформации. После мгновенного освобождения нагруженного конца возникает колебательный процесс по закону, согласно (1.6.2). Однако нетрудно заметить, что начальное условие $u(x,0)=\varepsilon_0 x$ противоречит граничному условию $\partial u/\partial x(l,t)=0$, поскольку $\partial u/\partial x(x,0)=\varepsilon_0$.

Если в (1.6.2) выполнить подстановку $x = l$, то получим выражение для перемещения незакрепленного конца

$$u_{x=l}=\frac{8\varepsilon_0 l}{\pi^2}\sum_{i=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{1}{i^2}\cos\frac{i\pi at}{2l}. \qquad (1.6.3)$$

Сумма такого ряда, согласно [21, стр. 80], известна

$$\sum_{i=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{1}{i^2}\cos\frac{i\pi at}{2l}=\frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2}-\left|\frac{\pi at}{2l}\right|\right),\quad -\frac{2l}{a}\le t\le\frac{2l}{a} \qquad (1.6.4)$$

и после подстановки в (1.6.3) дает выражение

$$u_{x=l}=\varepsilon_0 a\left(\frac{l}{a}-t\right)=\varepsilon_0(l-at),\quad \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{x=l}=-\varepsilon_0 a=\text{const}, \qquad (1.6.5)$$

графическое изображение которого с учетом периодического продолжения имеет вид, представленный на рис. 1.4.

Дифференцируя (1.6.2) по x, а затем приняв $x = 0$, получим выражение для деформации на закрепленном конце стержня

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0}=\frac{4\varepsilon_0}{\pi}\sum_{i=1,3\ldots}^{\infty}\frac{(-1)^{(i-1)/2}}{i}\cos\frac{i\pi at}{2l}. \qquad (1.6.6)$$

Сумма такого ряда общеизвестна [21, стр. 80]. Она составляет $\pi/4$ для $-l/a<t<l/a$ и равна 0 для $t=\pm l/a$. Графическое изображение этой функции имеется в [12, стр. 92] и показано на рис 1.4, согласно которому $(\partial u/\partial x)_{x=0}=\pm\varepsilon_0$, т. е. деформация на закрепленном конце стержня по абсолютной величине остается неизменной, но периодически меняет знак.

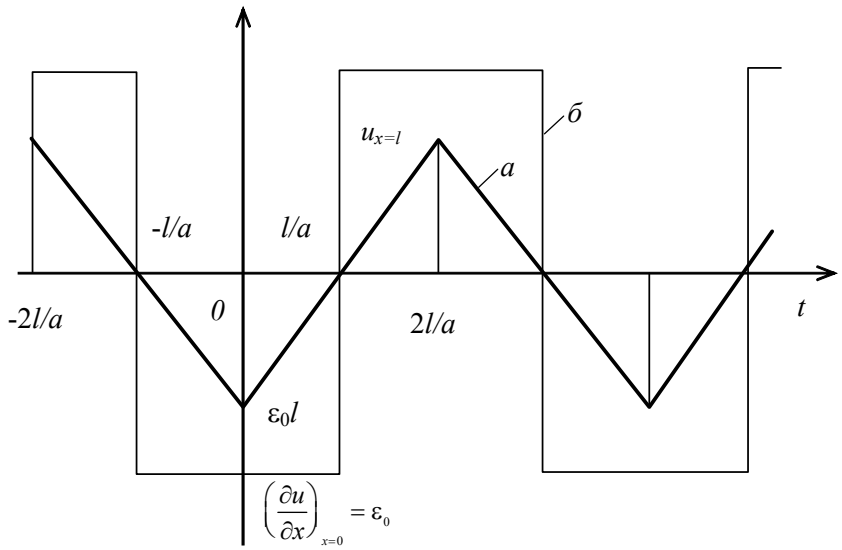

Рис. 1.4. Графическое изображение функций: *а* – перемещение свободного конца стержня; *б* – деформация на закрепленном конце

Дифференцируя (1.6.3) дважды по t, получим выражение для ускорения свободного конца

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{x=l} = -\frac{2\varepsilon_0 a^2}{l}\sum_{i-1,3...}^{\infty}\cos\frac{i\pi at}{2l}. \qquad (1.6.7)$$

Утверждать однозначно, что сумма этого ряда является производной по t от функции $\partial u/\partial t$, нельзя, поскольку ряд расходится для всех значений t, кроме $t = \pm l/a$, где его сумма равна нулю. Однако, это противоречит (1.6.5) и рис. 1.4, согласно которым везде, кроме угловых точек, $\left(\partial^2 u/\partial t^2\right)_{x=l} = 0$.. К тому же, результаты (1.6.3) и (1.6.6) противоречат физическому смыслу, поскольку оказывается, что движение свободного конца происходит с постоянной скоростью в каждом направлении, а нагружение закрепленного конца соответствует статическому состоянию, когда свободный конец находится в крайних точках (рис. 1.4), согласно которым везде, кроме угловых точек $\left(\partial^2 u/\partial t^2\right)_{x=l} = 0$. Если воспользоваться приближенным решением, сохранив лишь первую гармонику, то указанные физические противоречия снимаются и, как следует из (1.6.6), на закрепленном конце появляется скачок нагрузки примерно 27%. Однако несоответствие начальному условию $u(0,l) = \varepsilon_0 l$ в этом случае

составляет ~20%. Если же в приближенном решении оставить большее количество гармоник, то возникает серьезная проблема с определением ускорения из расходящегося ряда, поскольку коэффициенты при всех его членах равны единице.

Из рассмотренного выше может показаться, что подмеченные парадоксы относятся лишь к особым точкам, в данном случае к концам стержня, поскольку аналогичные локальные особенности (сингулярности) встречаются во многих задачах, не вызывая сомнений в правдоподобности полученной картины в целом. Чтобы рассеять подобного рода сомнения, рассмотрим поведение решения задачи о свободных колебаниях стержня и в других (неособых) сечениях, т. е. для $0 \le x \le l$.

Решение задачи можно получить, используя уже известное нам представление Даламбера (1.4.7), откуда с учетом начальных условий (1.6.1) вытекает

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\varepsilon_0(x - at) + \frac{1}{2}\varepsilon_0(x + at) = \varepsilon_0 x. \qquad (1.6.8)$$

Именно этот результат приведен в учебных пособиях [13, стр. 243; 22, стр.208], где оговаривается наличие прямой и обратной волн, но почему-то игнорируется очевидный факт их взаимного гашения, из-за чего решение (1.6.8), фактически имеющее вид $u(x,t) = \varepsilon_0 x$, повторяет лишь первое начальное условие. К тому же нетрудно заметить, что удовлетворить граничное условие $\partial u / \partial x(l,t) = 0$ не представляется возможности, а описываемый согласно (1.6.8) колебательный процесс на самом деле от времени t не зависит. Колебательный характер такому процессу можно придать лишь искусственно. Поэтому рассматриваемая механическая система по сути дела не способна выйти из статического состояния, заданного согласно (1.6.1). Сказанное означает, что решения задачи, удовлетворяющего поставленным условиям, не существует.

Как и наши предшественники [13, 22], пока не станем обращать внимание на упомянутую выше неприятную особенность решения (1.6.8). Будем, как и они, считать, что имеется две волны, бегущие вдоль стержня со скоростью a в прямом и обратном направлениях, и преобразуем (1.6.8.) к такому виду:

$$u(x,t)=\frac{l\varepsilon_0}{\pi}\left(\frac{\pi(x-at)}{2l}+\frac{\pi(x+at)}{2l}\right)=\frac{l\varepsilon_0}{\pi}\left(\frac{\pi z}{2l}+\frac{\pi\bar{z}}{2l}\right). \qquad (1.6.9)$$

Представим теперь каждый член, описывающий прямую и обратную волны, в скобках (1.6.9) в виде тригонометрического ряда согласно [21, стр. 80]

$$u(x,t)=\frac{4\varepsilon_0 l}{\pi^2}\left[\left(\sin\frac{\pi z}{2l}-\frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi z}{2l}+\ldots\right)+\left(\sin\frac{\pi\bar{z}}{2l}-\frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi\bar{z}}{2l}+\ldots\right)\right] \qquad (1.6.10)$$

и все же примем к сведению, что в целом сумма этих двух бесконечных рядов, как и выражений (1.6.8), (1.6.9), которые они представляют, тоже не должна зависеть от аргумента t.

Воспользуемся теперь известной [21, стр. 70] формулой

$$\sin\frac{i\pi}{2l}(x\pm at)=\sin\frac{i\pi x}{2l}\cos\frac{i\pi at}{2l}\pm\cos\frac{i\pi x}{2l}\sin\frac{i\pi at}{2l},\quad (i=1,3,5,\ldots) \qquad (1.6.11)$$

и преобразуем все члены обоих рядов в (1.6.10). Тогда, в соответствии с (1.6.11), все выражения, содержащие $\cos(i\pi x/2l)\sin(i\pi at/2l)$, взаимно сократятся, а (1.6.10) сразу же превратится в уже известную нам формулу (1.6.2), традиционный способ вывода которой достаточно сложен.

Поскольку общая сумма рядов (1.6.10), как уже оговаривалось, не зависит от времени t, то вполне логично полагать, что и сумма ряда в (1.6.2) тоже не должна зависеть от этого аргумента. Однако, после подстановки в (1.6.2) значения $x=l$ мы получим зависимость (1.6.3), из которой такое, казалось бы очевидное, следствие не вытекает. К тому же согласно (1.6.5) $\partial u/\partial t(l,t)=-a\varepsilon_0$. Но если же для определения скорости конца стержня дифференцирование ряда (1.6.3) по t выполнить до его суммирования, то получим результат

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{x=l}=-\frac{4\varepsilon_0 a}{\pi}\sum_{i=1,3\ldots}^{\infty}\frac{1}{i}\sin\frac{i\pi at}{2l}., \qquad (1.6.12)$$

из которого следует, что только таким способом можно удовлетворить второе начальное условие (1.6.1).

Решение (1.6.2) обычно получают путем достаточно громоздких преобразований методом Фурье [8, стр. 237;12, стр. 327], и такой,

неожиданный, и, казалось бы, вполне корректный переход от статического (1.6.8) к динамическому результату (1.6.2) приводит в недоумение. И действительно, из (1.6.3) вытекает, хотя и неправдоподобный, но все же колебательный процесс в виде пилообразной функции (рис. 1.4). К тому же после дифференцирования (1.6.2.) по x легко убедиться, что $\partial u / \partial x(l,t) = 0$, т. е. решение в виде ряда удовлетворяет, в противоположность (1.6.8), и второму граничному условию.

Парадоксы рассмотренного перехода ускользнули из поля зрения известных математиков, по-видимому, потому, что элементарные преобразования от (1.6.8) к (1.6.2), фактически заимствованные автором из [6, стр. 96; 13, стр. 244 и др.], никем не доводились до конца. Они прекращались, как только становилось понятно, что с помощью формулы (1.6.11) выражения типа (1.6.2) легко преобразуются в представления Даламбера (1.4.7), и лишь на этом основании без детального сопоставления конечных формул сформировалась некорректная точка зрения о полном совпадении обоих результатов. В рассмотренном, а также во многих других случаях, когда игнорируются классические требования о неразрывности и дифференцируемости граничных функций, это не подтверждается. На самом же деле (1.6.2) и (1.4.7) оказались различными функциями, хотя и одинаковых аргументов $(x \pm at)$.

1.6.2. Вынужденные колебания стержня под действием внезапно приложенной постоянной силы

Предположим, что к свободному концу стержня с одним закрепленным концом внезапно прикладывается постоянная продольная сила Q (рис. 1.5).

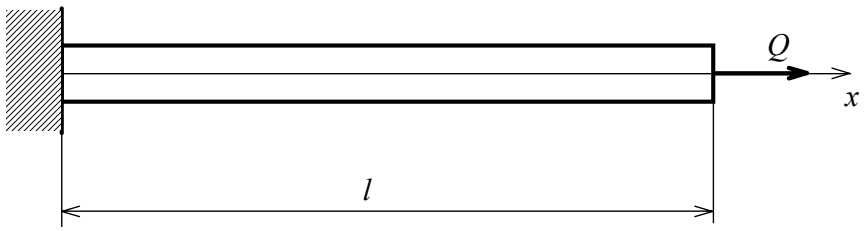

Рис. 1.5. К расчету вынужденных колебаний стержня под действием внезапно приложенной силы

например, по математической физике [7, стр. 64]. Имеется в виду задача о свободных колебаниях струны.

Упомянутая выше задача решена при условиях, когда начальное отклонение струны вместе с нею образует форму равнобедренного треугольника (рис. 2.2), а начальная скорость равна нулю. Таким образом, функции, которые описывают эти условия, имеют вид

$$u(x,0)=\frac{2hx}{l}, \text{ если } 0\le x\le\frac{l}{2};\ u(x,0)=\frac{2h(l-x)}{l}, \text{ если } \frac{l}{2}\le x\le l,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0, \qquad u(0,t)=0, \qquad u(l,t)=0, \qquad \left(\frac{u}{l}<<1\right). \qquad (2.1.1)$$

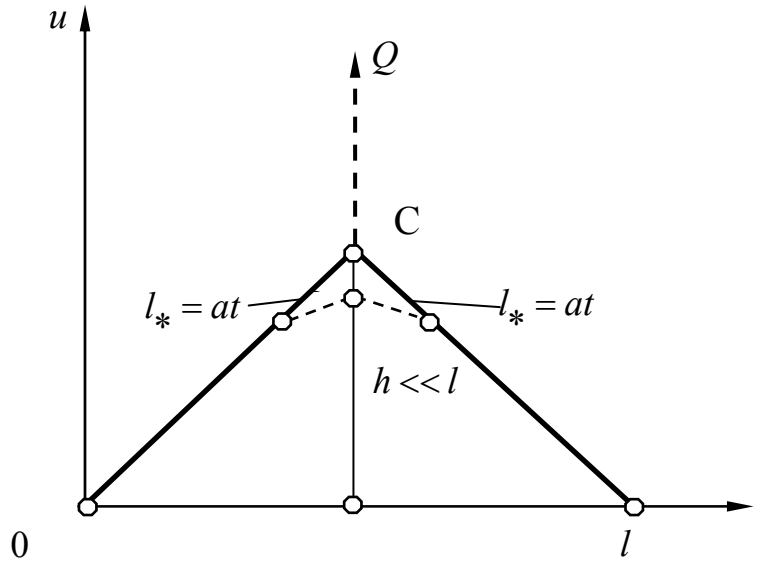

Рис. 2.2. Начальное отклонение струны

Анализируя начальные условия согласно (2.1.1), нужно отметить, что они возможны только тогда, когда в точке C, то есть посредине струны, действует постоянная вертикальная сила Q (рис.2.2), и потому эти условия характеризуют именно статическую форму струны. В этом случае на любую из сторон треугольника, созданного отклоненной с помощью силы Q струной, действует постоянная продольная сила, которая определяется по правилу параллелограмма. Тогда статические напряжения (деформации) каждого участка струны будут одинаковыми

по всей ее длине. Но в момент мгновенного прекращения действия силы Q статическая картина нарушается, а вершина треугольника C приходит в движение с какой-то начальной скоростью в сторону, противоположную действию силы Q. Благодаря этому вершина становится притупленной, а растянутые стороны треугольника постепенно разгружаются, образовывая возмущенные участки, длина которых $l_* = at$ (рис. 2.2). Процесс возмущения проходит со скоростью звука a и длится, пока волна постепенной разгрузки по длине каждой стороны не достигнет закрепленных концов струны $x = 0$ и $x = l$.

Как видим, статические начальные условия, хотя и отображают реальное нагружение перед началом колебательного процесса, но не учитывают того, что этот процесс охватывает струну постепенно и возникает только в возмущенном участке струны, границы которого, т.е. $l_* = at$, расширяются со скоростью звука.

Таким образом, принудительно навязывая статические начальные условия согласно (2.1.1), которые не имеют ничего общего с реальными, когда волны разгрузки достигнут концов струны, мы вынуждаем динамическую систему эти статические условия периодически повторять.

Нетрудно заметить, что при постановке этой задачи, в противоположность рассмотренным в [5, 6], начальные и краевые условия согласованы, однако функция, которая характеризует начальное отклонение струны, хотя и непрерывная, но имеет разрывную, а точнее неоднозначную, производную по x в точке C, поскольку $\partial u / \partial x(l/2,0) = \pm 2h/l$. А это и есть основанием, в соответствии с общеизвестными требованиями [7, стр. 63], считать сомнительным существование классического решения, хотя такое решение и приводится в учебных пособиях, например [7, стр. 65], и для линейного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \bar{a}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \bar{a}^2 = \frac{T_n}{\bar{\rho}} \tag{2.1.2}$$

имеет вид

$$u(x,t) = \frac{8h}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin\frac{(2n+1)\pi x}{l} \cos\frac{(2n+1)\pi \bar{a}\, t}{l}, \tag{2.1.3}$$

где T_n – начальное натяжение струны; $\bar{\rho}$ – погонная плотность струны.

Если с целью расчета величины ускорения $\partial^2 u/\partial t^2$ или для проверки правильности решения (2.1.3) осуществить его почленное дифференцирование, то, как и в задачах, рассмотренных в [5, 6] и в первой части пособия, получим расходящиеся ряды, поскольку коэффициенты их членов будут равняться единице. Таким образом, классический принцип суперпозиции частных решений (см. п. 1.6.5), который требует обязательной сходимости указанных рядов [8, стр. 92], нарушается. Расхождение второй производной ряда (2.1.3), как известно [8, стр. 88], не разрешает считать его и решением уравнения (2.1.2).

2.1.3. Сомнительные физические предпосылки традиционных постановок задач о распространении локальных возмущений в упругих средах

Весьма показательной в плане рассмотренных в п. 2.1.1 недоразумений является задача о распространении локальных возмущений в струне. Движения такого типа обычно подразделяют на волны отклонения и волны импульса [7, стр. 37–51]. Решая подобные задачи методом характеристик [7, стр. 55], иногда полагают, что локальное отклонение струны, например, в виде равнобедренного треугольника или синусоиды разделяется на две одинаковые формы такого же вида (рис. 2.3, а), но в два раза меньшей площади. Указанные формы движутся в разные стороны вдоль струны со скоростью $\bar{a}$ и почему-то вызывают лишь местное отклонение. При таком представлении решения струна бесконечной длины остается в покое за исключением двух взаимно удаляющихся со скоростью $\bar{a}$ (причем $\bar{a}$ – это не скорость звука!) локальных возмущений неизменной формы. Такого рода представления, в т.ч. и в теории ударных волн [3, стр. 406], хотя, очевидно, и заимствованы из окружающей действительности, но соответствуют они не упругим волнам, а волнам другой природы, распространяющимся в диссипативных средах. Например, это волны,

распространяющиеся на водной поверхности, причем, благодаря не упругим силам, а силам веса.

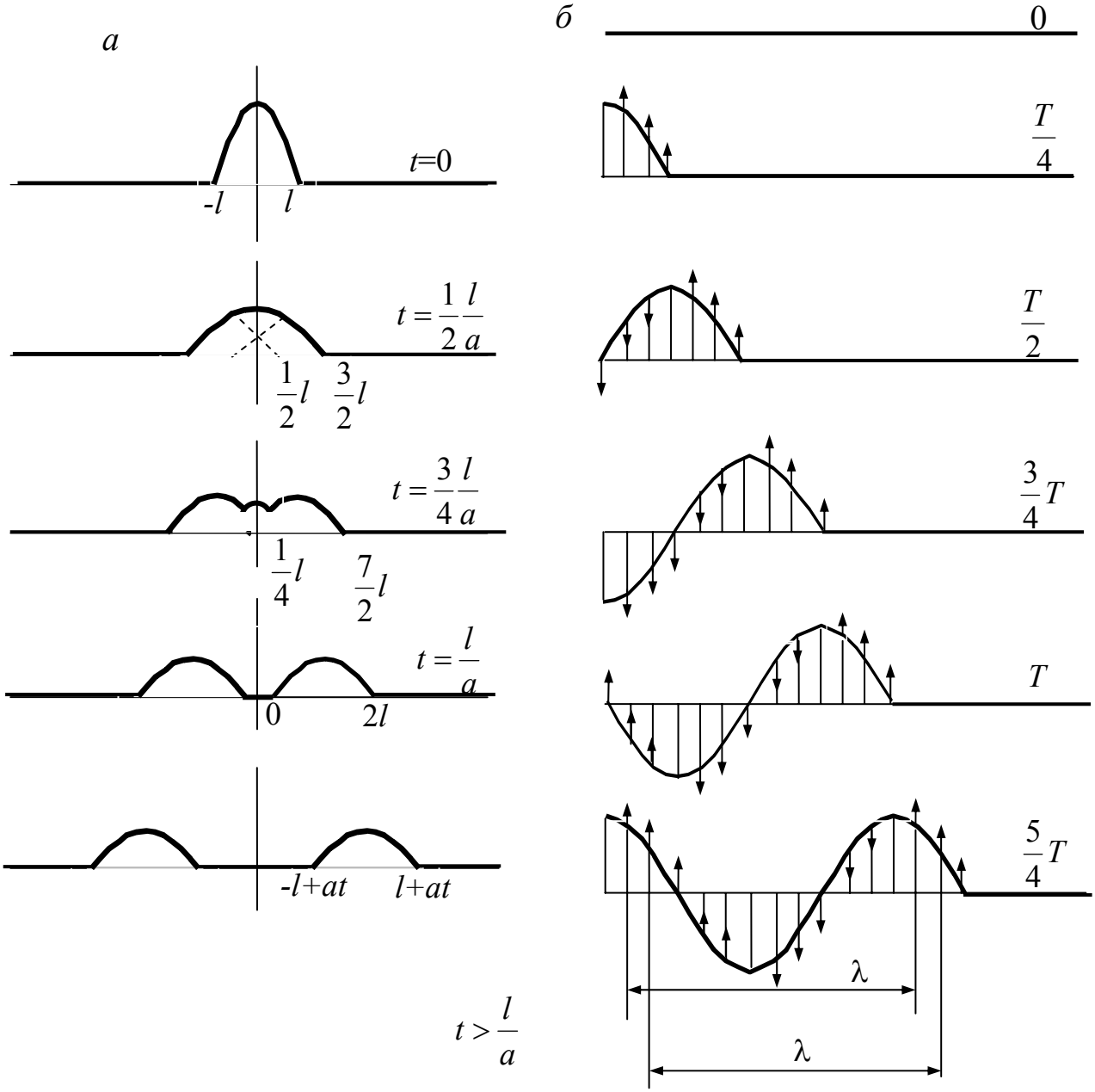

Рис. 2.3. Взаимоисключающие представления о распределении локальных возмущений: *а*– в курсах математической физики [4,7,8 и др.]; *б* – в учебниках физики для средней школы и в [9];

Ошибочность упомянутых выше представлений о распространении волн в упругом теле можно пояснить хотя бы тем, что они базируются на сомнительном предположении об отсутствии расширяющейся возмущенной области из-за мгновенной остановки отклоненных частиц после возвращения их в исходное положение, соответствующее натянутой струне. На самом же деле в идеально упругом теле возмущения распространяются со скоростью звука и после прохождения возмущения через какую-либо точку за его задним фронтом возникает незатухающий колебательный процесс. И хотя в учебных пособиях по физическим основам механики, например [9, стр. 200–201] и даже в учебниках физики для средней школы уже сформулированы именно такие представления (рис. 2.3, б), в курсах же математической физики [4, 7 и др.] а также других университетских дисциплин все еще почему-то господствуют прежние, противоречащие физическому смыслу, взгляды о неизменной форме локальных возмущений в идеально упругом теле согласно рис. 2.3, а.

2.1.4. Краткие выводы

Таким образом, следует отметить, что физически бессмысленные решения многих классических задач, примеры которых рассмотрены в [5,6], обусловлены несовместимыми с общепринятыми представлениями о распространении упругих волн математическими постановками. Такие постановки фактически представляют собой принудительное навязывание заведомо колебательной системе по сути статической начальной формы, от которой линейная система не способна самостоятельно освободиться. В лучшем случае эти решения в результате некорректных математических преобразований и благодаря процедуре искусственного продолжения лишь периодически повторяют первоначально заданную статическую форму, а после разложения в ряд Фурье создают обманчивую видимость наличия множества гармоник, хотя на самом деле противоречат принципу суперпозиции частных решений.

2.1.5. Контрольные вопросы

1. С какой скоростью распространяются возмущения в упругой среде?

2. В каком направлении перемещается граница между возмущенной и невозмущенной областями упругой среды?
3. Почему задачи о распространении возмущений следует относить к задачам о взаимодействующих упругих телах и с подвижными границами, и с переменными массами?
4. Укажите на противоречия в начальных и граничных условиях в классической задаче о свободных колебаниях стержня после устранения удерживающей силы на его незакрепленном конце.
5. Опишите процесс распространения возмущения в стержне после устранения удерживающей силы на его незакрепленном конце.
6. Запишите формулу, позволяющую определить длину возмущенной части стержня.
7. Укажите на противоречия в начальных и граничных условиях в классической задаче о свободных колебаниях струны после устранения удерживающей силы. Начальное отклонение принять в виде равнобедренного треугольника.
8. Опишите фактический процесс распространения возмущений в струне после устранения удерживающей силы. Начальное отклонение принять в виде равнобедренного треугольника.
9. Как определить время распространения возмущения до закрепленного конца стержня?
10. Как определить время распространения возмущения до закрепленных концов струны при ее начальном отклонении в виде равнобедренного треугольника?
11. Почему традиционные начальные условия для свободных колебаний стержня или струны следует рассматривать как статические и не соответствующие действительности?
12. Почему традиционные начальные условия для задачи о свободных колебаниях стержня противоречат классическим требованиям?
13. Как реагирует математическая модель линейной динамической системы на заданные статические начальные условия?
14. Как проявляется нарушение принципа суперпозиции при нарушении классических требований к формулированию начальных условий?
15. Почему традиционные физические предпосылки в классических задачах о распространении локальных возмущений в упругих телах являются ошибочными? Поясните это на рис. 2.3,б из курса физики.

2.2. Очевидный упрощенный подход к постановке и решение задачи о свободных колебаниях струны

2.2.1. Предварительные замечания

В п. 2.1.2. показано, что точное решение известной классической задачи о свободных колебаниях струны имеет такие же недостатки, как и другие задачи, вошедшие в учебники и подробно рассмотренные в первой части учебного пособия. Избежать появления таких недостатков можно лишь путем корректных постановок этих задач с учетом современных физических представлений о распространении волн в упругой среде. Однако такой подход требует чрезвычайно сложных математических постановок применительно к связанным упругим телам и с подвижными границами, и переменными массами. Практическая реализация подобного подхода находится в зачаточном состоянии и поэтому невозможна без предварительных исследований. Ниже предлагается упрощенный подход, позволяющий избежать упомянутых в п. 2.1.2 и в [5] недоразумений при сохранении основной информации о реальной физической картине свободных колебаний струны.

2.2.2. Формулирование начальных условий

Начнем рассмотрение колебаний струны с того момента, когда волна постепенной разгрузки достигает ее закрепленных концов, но еще не изменяет начального нагружения, а следовательно и угла отклонения, в концевых точках. Будем полагать, что именно в этот момент все частицы струны приходят в движение. При этом ее начальная треугольная форма (рис.2.2) уже успела трансформироваться и имеет вид, близкий к основной форме. Для такого предположения имеется достаточно оснований, поскольку начальное отклонение в виде равнобедренного треугольника при незначительных изменениях действительно очень легко превращается в синусоиду. Кроме того, весь предшествующий опыт свидетельствует, что основная форма в подобных задачах о свободных колебаниях, как правило, оказывается определяющей. Однако, выдвигая такое предположение на основе интуиции, мы пока еще не знаем ни величины перемещений, ни скорости движения. Поэтому и не можем определить количественные

показатели начальной формы, заданной в виде синусоиды. В связи с этим действительные начальные и граничные условия, содержащие пока неизвестные величины h_0 и A, запишем так:

$$u(x,0)=h_0\sin\frac{\pi x}{l},\ \ \dot{u}(x,0)=\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=A\sin\frac{\pi x}{l},\ \ u(0,t)=u(l,t)=0. \qquad (2.2.1)$$

Назовем первые два соотношения отсчетными начальными условиями. Учтем также, что согласно первому условию (2.2.1)

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l,0)=-\frac{\partial u}{\partial x}(0,0)=\frac{h_0\pi}{l}. \qquad (2.2.2)$$

Особо отметим, что эта величина остается такой же, как и во время действия силы Q, с помощью которой была отклонена струна

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t_n)=\frac{2h_{n0}}{l}\ (0\le x\le\frac{l}{2}),\ \frac{\partial u}{\partial x}(x,t_n)=-\frac{2h_{n0}}{l}\ (\frac{l}{2}\le x\le l). \qquad (2.2.3)$$

Учитывая упомянутое и приравнивая соответствующие выражения, имеем

$$-\frac{\partial u}{\partial x}(l,0)=\frac{\partial u}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial u}{\partial x}(x,t_n)\Rightarrow\frac{h_0\pi}{l}=\frac{2h_{n0}}{l}\Rightarrow h_0=\frac{2h_{n0}}{\pi}. \qquad (2.2.4)$$

Максимальное значение начальной скорости A определим, исходя из условия сохранения энергии для струны в целом

$$\Pi_n+\Pi_{n0}=\Pi_n+\Pi_0+W_0\Rightarrow\Pi_{n0}=\Pi_0+W_0, \qquad (2.2.5)$$

где Π_n – удельная потенциальная энергия предварительного натяжения; Π_{n0} – удельная потенциальная энергия начального отклонения за счет силы Q; Π_0 – удельная потенциальная отсчетного состояния; W_0 – удельная кинетическая энергия отсчетного состояния.

Удельную потенциальную энергию начального отклонения струны, очевидно, можно записать в виде двух слагаемых, а именно:

$$\Pi_{n0}=\sigma_n\varepsilon_{n0}+\frac{1}{2}\sigma_{n0}\varepsilon_{n0} \qquad (2.2.6)$$

где σ_n –начальное напряжение за счет силы предварительного

натяжения струны T_n; σ_{n0} – напряжение, вызванное начальным отклонением струны; ε_{n0} – продольная деформация струны.

Первый член в (2.2.6) не содержит множителя $1/2$ по следующей причине. В момент, когда начинается начальное отклонение струны, предварительное натяжение σ_n уже достигло своего конечного значения и в процессе отклонения остается постоянным. Что же касается второго члена, то он содержит множитель $1/2$, поскольку σ_{n0} достигает своего конечного значения одновременно с деформацией ε_{n0}, т.е. синхронно с деформацией изменяется в пределах $0-\sigma_{n0}$.

Поскольку для упругой среды

$$\sigma_{n0} = E\varepsilon_{n0}, \tag{2.2.7}$$

то из (2.2.6) имеем

$$\Pi_{H0} = \left(\sigma_n + \frac{E\varepsilon_{n0}}{2}\right)\varepsilon_{n0}. \tag{2.2.8}$$

Используя приближенные соотношения (1.4.18), полученные при выводе уравнения колебаний струны в первой части пособия

$$\varepsilon_{n0} = 2\sin^2\frac{\alpha_{n0}}{2} \approx \frac{\alpha_{n0}^2}{2}, \tag{2.2.9}$$

и имея в виду, что согласно рис. 2.2.

$$\alpha_{n0} = \frac{2h_{n0}}{l}, \tag{2.2.10}$$

из (2.2.8) получим

$$\Pi_{n0} = 2\left(\sigma_n + E\frac{h_{n0}^2}{l^2}\right)\frac{h^2{}_{n0}}{l^2}. \tag{2.2.11}$$

Среднее значение удельной потенциальной энергии для струны в целом в отсчетном состоянии по аналогии с (2.2.8) запишем так:

$$\Pi_0 = \frac{1}{2l}\int_0^l\left(\sigma_n + \frac{E\varepsilon_0}{2}\right)\varepsilon_0 dx, \tag{2.2.12}$$

$$u(x,0)=\frac{Q}{c}\left(\frac{x}{l}-\frac{2}{\pi}\sin\frac{\omega}{a}x\right),\quad c=\frac{ES}{l}. \tag{2.4.3}$$

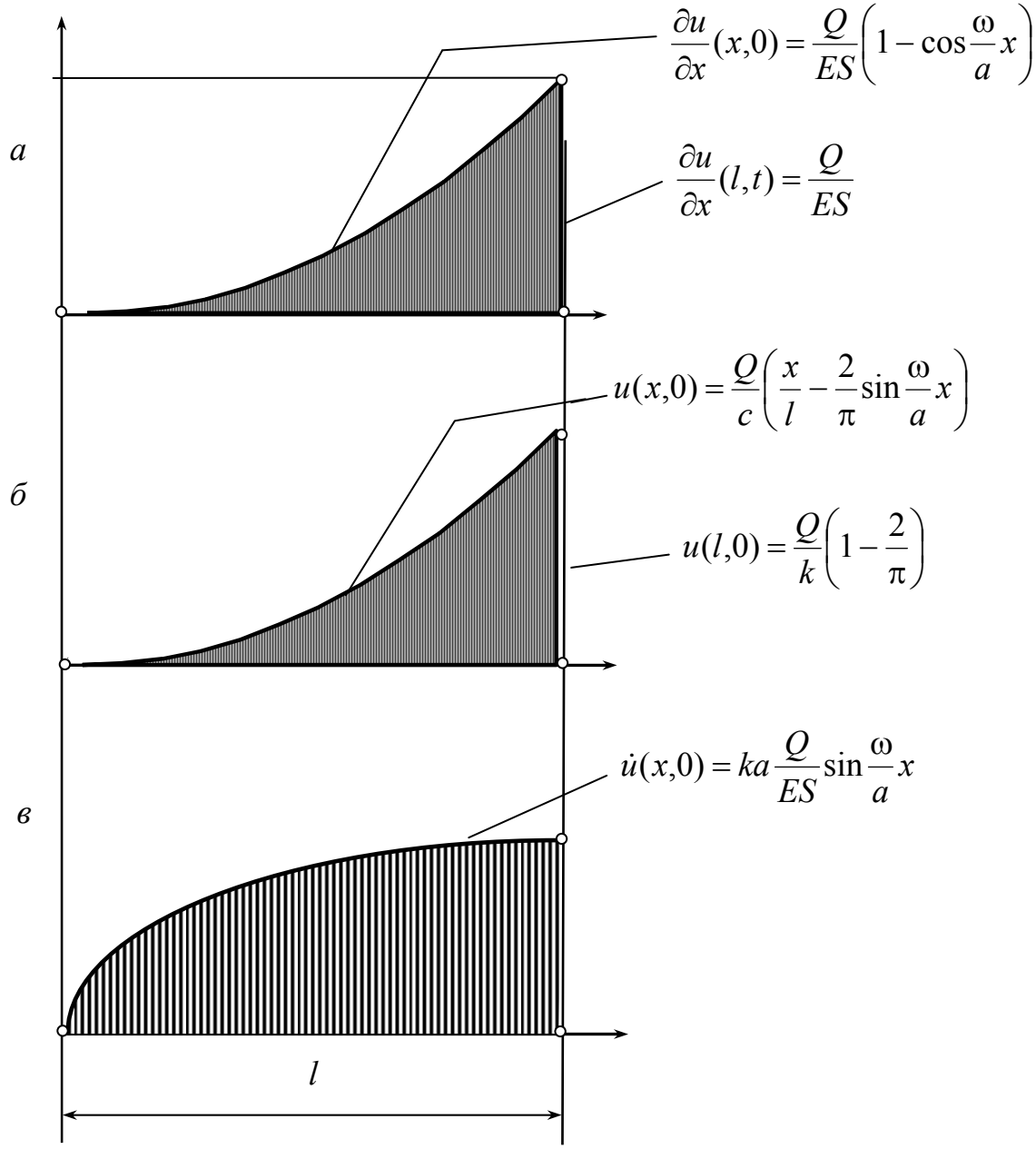

Рис.2.8. К определению начальных условий задачи о вынужденных колебаниях стержня с одним закрепленным концом при воздействии внезапно приложенной силы Q к свободному концу: *а* – распределение деформаций по длине стержня в начальный (отсчетный) момент времени $t=0$; *б* – распределение перемещений по длине стержня в начальный (отсчетный) момент времени $t=0$; *в* – распределение скоростей по длине стержня в начальный (отсчетный) момент времени $t=0$.

Распределение скоростей в начальный момент, принятый за начало отсчета, также следует полагать соответствующим основной форме, то есть

$$\dot{u}(x,0)=\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=k\dot{u}_0\sin\frac{\omega}{a}x, \qquad (2.4.4)$$

где k – коэффициент, подлежащий определению; $\dot{u}_0$ – начальная скорость конца стержня (в момент приложения силы Q), которая тоже подлежит определению.

Граничные условия, очевидно, с достаточным основанием можно оставить в виде согласно (2.4.1).

2.4.3. Решение волнового уравнения

Решение однородного волнового уравнения при заданных согласно (2.4.3), (2.4.4), (2.4.1) начальных и граничных условиях можно получить без особого труда методом Фурье. Легко проверить, что записанная ниже функция

$$u(x,t)=\frac{Q}{c}\left(\frac{x}{l}-\frac{2}{\pi}\sin\frac{\omega}{a}x\cos\omega t\right)+\frac{k\dot{u}_0}{\omega}\sin\frac{\omega}{a}x\sin\omega t, \qquad (2.4.5)$$

$$c=\frac{ES}{l},\quad \omega=\frac{\pi a}{2l}$$

представляет собой такое решение.

Для определения начальной скорости $\dot{u}_0$ воспользуемся следующими соображениями (рис. 2.5,а). В момент приложения силы Q конец стержня приобретает какую-то начальную скорость $\dot{u}_0$. Для ее определения выделим на свободном конце стержня возмущенный (деформированный) бесконечно малый отрезок длиной $dl_*=adt$. В соответствии с законом приращения импульса

$$Qdt=\dot{u}_0 d\overline{m}_*\Rightarrow ES\varepsilon_l dt=\dot{u}_0\rho Sdl_*, \qquad (2.4.6)$$

откуда с учетом, что $E/\rho=a^2$, $dl_*/dt=a$, по аналогии с (2.3.3, а) получим такое выражение:

18. На примере вынужденных колебаний дискретно-континуальной двухмассовой системы поясните условия, при которых связь ведет себя как нейтральная или же как безынерционная.
19. На примере вынужденных колебаний дискретно-континуальной двухмассовой системы поясните условия, при которых возникает локальная перегрузка связи противоположного знака.
20. Запишите варианты для определения собственной частоты одномассовой дискретно-континуальной системы с закрепленной связью.
21. Запишите варианты для определения собственной частоты двухмассовой дискретно-континуальной системы.
22. Расскажите о принципе динамического гашения колебаний.
23. Приведите факты, свидетельствующие о достоверности определяющих соотношений для реакций связи с распределенной массой.
24. Расскажите о методе, который позволяет получить решение задачи в случае резонанса. В качестве примера используйте одномассовую систему с закрепленной связью.

2.6. Уравнения движения многомассовых дискретно-континуальных систем с переменными массами

Динамические схемы многих современных механических систем содержат звенья с переменными параметрами. Изменяться могут величины дискретных масс, но чаще всего изменяются жесткости и массы связей. Обычно изменение жесткости и массы связей вызывается изменением их длины. Наиболее широко распространенные в технике случаи, приводящие к рассмотрению подобных задач, связаны с подъемом (опусканием) груза с помощью каната или винта, погружением (забивкой) свай в грунт, переключением вращающихся зубчатых колес в редукторах за счет их перемещения вдоль вала и т.п. (рис. 2.20). Ввиду того, что при работе таких устройств происходит изменение массы и жесткости связей, расчет динамических нагрузок по формулам, рассмотренным в п. 2.5, в ряде случаев может привести к значительным погрешностям не только количественного, но и качественного характера. Поэтому корректное построение динамических моделей для дискретно-континуальных систем с переменными параметрами является важнейшей составной частью

научно обоснованных инженерных расчетов механических систем.

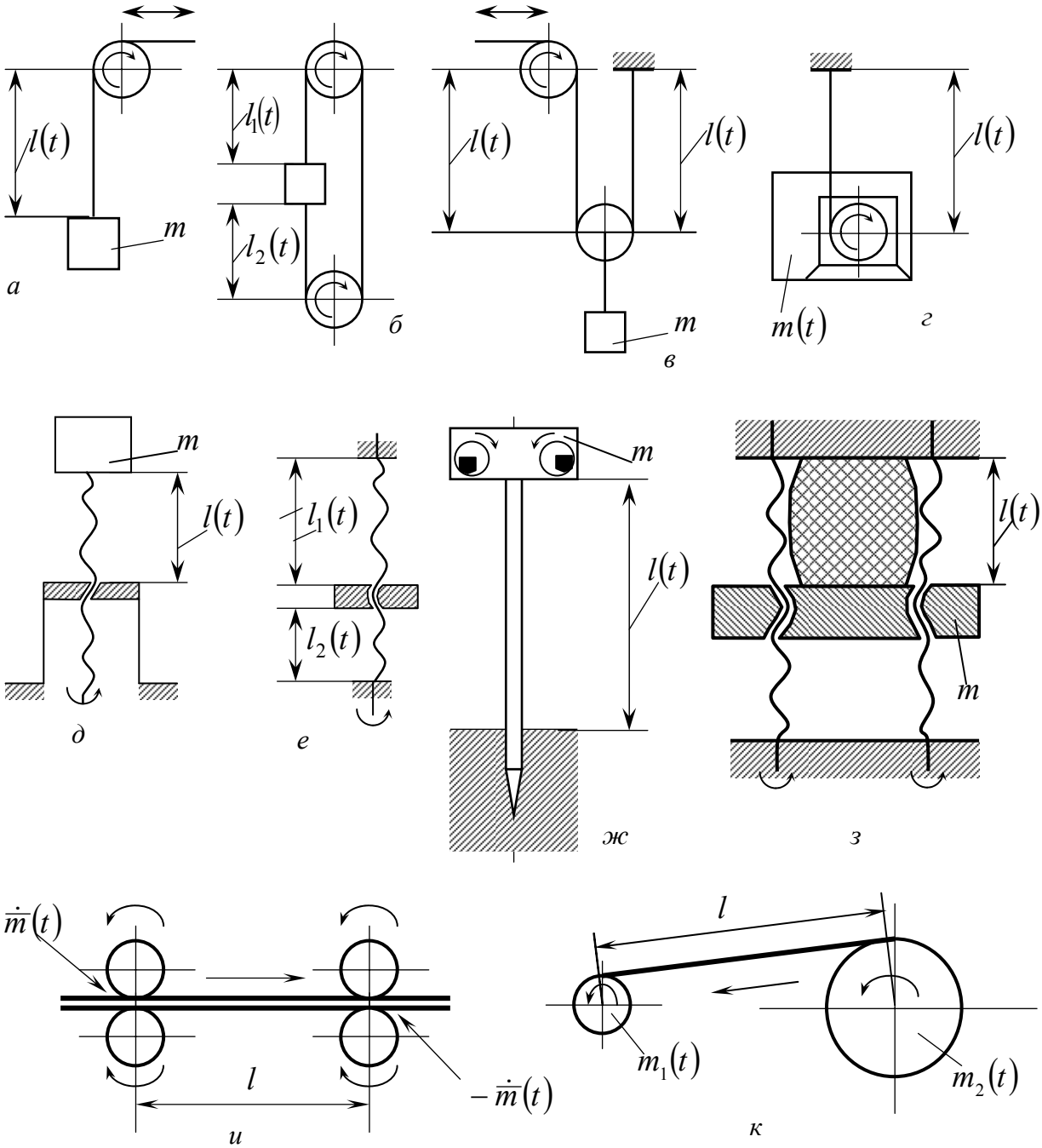

Рис.2.20. Характерные примеры дискретно-континуальных систем с переменными параметрами: *а* - незамкнутый канатный подъемник; *б* - замкнутый канатный подъемник; *в* - полиспаст; *г* - канатный подъемник с приводом на подъемной платформе; *д* - винтовой подъемник с подвижным винтом; *е* - винтовой подъемник с неподвижным винтом; *ж* - вибропогружение сваи; *з* - винтовой пресс; *и* - секция лентопротягивающего устройства; *к* - намоточное устройство.

2.6.1. Состояние вопроса

Проблеме построения удобных для расчетов уравнений динамики механических систем с переменной массой звеньев посвящены многочисленные работы, информацию о которых можно найти в [20]. Особое место среди этих робот занимают десятки публикаций, имеющие непосредственное отношение к обсуждаемому вопросу и посвященные динамике шахтного подъема. Наиболее корректно задача построения уравнений динамики шахтного подъема решена в работах [21, 22]. Однако принятое их авторами предположение о линейном распределении перемещений по длине каната по сути дела констатирует независимость динамических нагрузок от координат. Для горизонтальной колебательной системы, когда силы веса не учитываются, такое предположение соответствует какому-то возможному состоянию, но для вертикальной системы даже в статическом состоянии наличие сил веса каната приводит к квадратичному распределению перемещений по его длине. Поэтому предположение согласно [21, 22] может отвечать с некоторым приближением лишь частному случаю, т.е. для малой высоты подъема, когда вес каната мал по сравнению с весом груза.

Наряду с отмеченным следует обратить внимание и на то, что в режиме опускания присоединяемые части каната обычно уже имеют начальные деформации, которые оказывают существенное влияние на общее напряженное состояние. Этот фактор в упомянутых работах не учитывается.

Таким образом, можно с уверенностью утверждать, что актуальность решения и данной задачи, и более общей в уточненной постановке не вызывает сомнений.

2.6.2. Постановка задачи

Рассмотрим рядную дискретно-континуальную систему, состоящую в общем случае из переменных дискретных масс $m_i(t)$ и связей в виде стержней постоянного сечения $S_i \neq S(x)$, масса которых изменяется, т. е. $\overline{m}_i = \overline{m}_i(t)$ в результате изменения длины $l_i = l_i(t)$ (рис.2.21, *а*).

Условно освобождая дискретные массы от связей, запишем уравнения баланса сил, действующих на них

$$P_{+i} - P_{-i} + Q_i + m_i g = m_i \ddot{x}_i, \; i = 1,2,3.....N. \qquad (2.6.1)$$

От (2.5.1) эти уравнения отличаются лишь наличием дополнительных слагаемых, учитывающих силы веса.

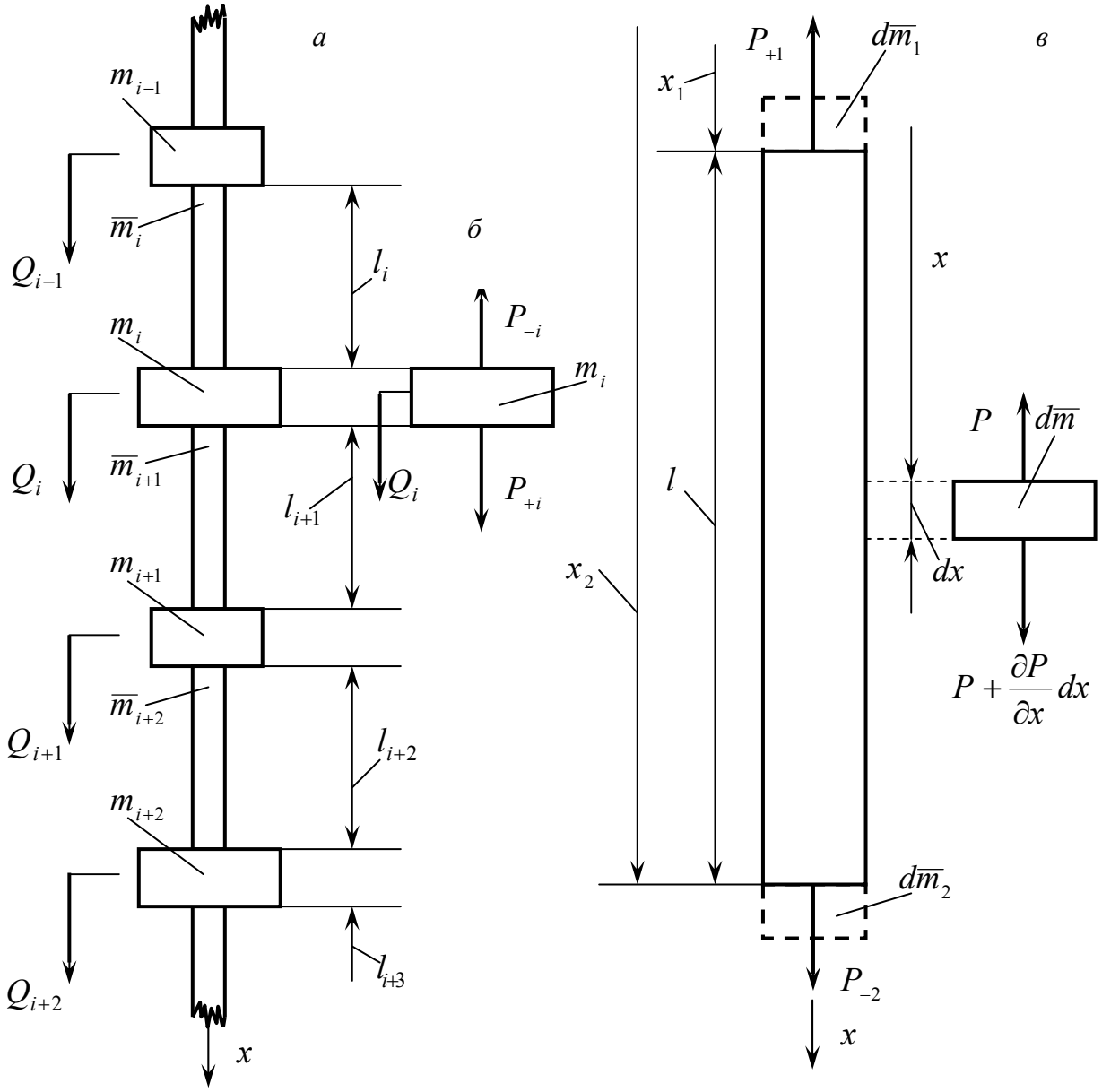

Рис.2.21. К построению уравнений движения рядной дискретно-континуальной системы с переменными параметрами: *а* – общая схема; *б* – к условию баланса сил для дискретной массы m_i; в – к условию баланса сил для связи переменной длины $l = l(t)$, $\overline{m} = \overline{m}(t)$.

Для замыкания системы уравнений (4.1) необходимо построить определяющие соотношения для реакций связей P_{+i}, P_{-i}.

Для статического нагружения тела соотношения (2.7.24) существенно упрощаются, поскольку два последних слагаемых можно не учитывать, и тогда

$$2G\left(\frac{VS_{nj0}^{\max}}{V_0 S_{nj}^{\max}}-1\right)+K\left(\frac{V}{V_0}-1\right)=\frac{1}{V}\int_S x_j q_j dS,$$

$$G\left(\frac{<\Delta_i u_j>}{<a_i>}+\frac{<\Delta_j u_i>}{<a_j>}\right)=\frac{1}{2V}\int_S \left(x_j q_i + x_i q_j\right)dS\,. \qquad (2.7.25)$$

В случае необходимости выражение в скобках с коэффициентом $2G$ можно заменить другими согласно (2.7.17), (2.7.18), (2.7.18, а) или (2.7.18, б).

2.7.3. Примеры

Полученные определяющие соотношения для тела в целом могут быть использованы при решении различных прикладных задач, имеющих важное значение и для практики, и для теории.

Пример 1. Используя только первое уравнение (2.7.25), по- видимому, можно экспериментально определять упругие константы на образцах произвольной формы при достоверной информации об интенсивности поверхностного нагружения.

И действительно, для одноосного нагружения тела первую формулу (2.7.23) можно записать, используя только одну константу, т.е. модуль упругости Юнга Е

$$<\sigma_{jj}>=E<\varepsilon_{jj}>. \qquad (2.7.26)$$

В этом случае первое уравнение (2.7.25) принимает вид

$$\frac{1}{V}\int_F x_j q_j dS = E\left(\frac{VS_{nj0}^{\max}}{V_0 S_{nj}^{\max}}-1\right). \qquad (2.7.27)$$

Для исследуемого образца в виде стержня постоянного сечения, к торцевым поверхностям которого приложены постоянные внешние нагрузки интенсивностью q_x, из (2.7.27) имеем

$$\frac{1}{V}\left(x_2 \int_S q_x(x_2) dS - x_1 \int_S q_x(x_1) dF \right) = E\left(\frac{VS_0}{V_0 S} - 1 \right). \qquad (2.7.28)$$

Из условия равновесия стержня интегралы должны давать одну и ту же величину силы P_x, приложенной к его концам. Тогда из (2.7.28) получим общеизвестный результат

$$\frac{P_x(x_2 - x_1)}{V} = E\left(\frac{VS_0}{SV_0} - 1 \right) \Rightarrow \sigma_x = E\frac{l - l_0}{l_0}, \qquad (2.7.29)$$

который подтверждает достоверность определяющих соотношений (2.7.25) и возможность определения из эксперимента упругих констант для тела произвольной формы.

Пример 2. Соотношения (2.7.25) могут быть использованы, например, для дальнейшего развития теории эффективных модулей пористых сред. Последней проблеме посвящено огромное количество публикаций, представление о которых можно получить из обзоров, рассматриваемых в монографиях [26–28]. Трудности, которые возникают при решении этой проблемы, породили множество подходов и развиваемых на их основе методов. Применение соотношений (2.7.25) позволяет существенно облегчить решение проблемы, что хорошо видно из приведенного ниже примера.

Будем рассматривать содержащий достаточно много пор (представительный) макрообъем упругой пористой среды $\Delta\overline{V} = \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$, заведомо предполагая, что его механические свойства не зависят от ориентации декартовой системы координат $x_i (i = 1,2,3)$, т. е. пористая среда в целом, как и вещество, из которого она состоит (каркас), является изотропной.

Предположим, что каркас тоже является идеально упругим и в этой связи для каждого его микрообъема $dV = dx_1 dx_2 dx_3$ можно записать известные [17] соотношения

$$e_{ii} = \frac{1}{E}\left[\tau_{ii} - \nu(\tau_{jj} + \tau_{kk}) \right], \ (i=1,2,3), \qquad (2.7.30)$$

осредняя которые по объему каркаса ΔV, т.е. по сплошной части макрообъема пористой среды $\Delta\overline{V}$, получим

$$< e_{ii} >= \frac{1}{E}\left[< \tau_{ii} > -\nu\left(< \tau_{jj} > + < \tau_{kk} >\right)\right], \qquad (2.7.31)$$

где e_{ii}, τ_{ii} -нормальные компоненты тензоров микродеформаций и микронапряжений соответственно; ν-коэффициент Пуассона.

Запишем очевидные соотношения между средними микронапряжениями $< \tau_{ii} >$ и макронапряжениями σ_{ii}

$$< \tau_{ii} >= \frac{1}{\Delta V}\int_{\nu} \tau_{ii} dV = \frac{1}{k\Delta\overline{V}}\int_{\Delta x_i}\left(\int_{\Delta F_{jx}} \tau_{ii} dS_{jk}\right) dx_i = \frac{\sigma_{ii}}{k}, \qquad (2.7.32)$$

где $k = \Delta V / \Delta\overline{V}$ - сплошность пористой среды; ΔS_{jk} - сплошная часть макроплощадки $\Delta\overline{S}_{jk} = \Delta x_j \Delta x_k$.

Средние микродеформации $< e_{ii} >$, очевидно, характеризуют продольные деформации сплошной части отрезков Δx_i. И действительно

$$< e_{ii} >= \frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dV = \frac{1}{k\Delta\overline{V}}\int_{\Delta\overline{S}_{jk}} (a_i - a_{i0}) d\overline{S}_{jk} = 1 - \frac{1}{k\Delta\overline{V}}\int_{\Delta\overline{S}_{jk}} a_{i0} d\overline{S}_{jk}, \qquad (2.7.33)$$

где a_i, a_{i0} - суммарные длины сплошных частей отрезка Δx_i в конечном и начальном состояниях пористой среды соответственно.

Выражение для интеграла от длины сплошной части отрезка в начальном состоянии a_{i0} по конечной площадке $\Delta\overline{S}_{jk}$ можно записать в таком виде:

$$\int_{\Delta\overline{S}_{jk}} a_{i0} d\overline{S}_{jk} = \left[\Delta\overline{V}(1 - \varepsilon_{ii})\right] k_i, \qquad (2.7.34)$$

если пренебречь поворотами и предположить, что все части a_{i0}, как и a_i, тоже находятся на одной прямой ввиду малости деформаций $(\varepsilon_{ii} << 1)$.

С учетом (2.7.34) выражение (2.7.33) принимает вид

$$< e_{ii} >= 1 - \frac{k_i}{k}(1 - \varepsilon_{ii}), \qquad (2.7.35)$$

где k_i-сплошность среды в некотором условном конечном состоянии

макрообъема (при отсутствии компоненты макродеформации ε_{ii}).

Подставим теперь выражения для $<\tau_{ii}>$ и $<e_{ii}>$ согласно (2.7.32) и (2.7.35) в соотношения (2.7.31) и в результате получим

$$k - k_i(1-\varepsilon_{ii}) = \frac{1}{E}\left[\sigma_{ii} - \nu(\sigma_{jj} + \sigma_{kk})\right], \ (i=1,2,3). \qquad (2.7.36)$$

Вычтем попарно эти соотношения одно из другого. Тогда, имея в виду, что $E = 2G(1+\nu)$, находим

$$\sigma_{ii} - \sigma_{jj} = 2G\ \left[k_j(1-\varepsilon_{jj}) - k_i(1-\varepsilon_{ii})\right]. \qquad (2.7.37)$$

Но для макрообъема изотропной среды можно записать [17]

$$\sigma_{ii} - \sigma_{jj} = 2G_э(\varepsilon_{ii} - \varepsilon_{jj}), \qquad (2.7.38)$$

где $G_э$ - эффективный модуль Гука пористой среды.

Приравнивая правые части (2.7.37) и (2.7.38), имеем

$$G\left[k_j(1-\varepsilon_{jj}) - k_i(1-\varepsilon_{ii})\right] = G_э(\varepsilon_{ii} - \varepsilon_{jj}), \qquad (2.7.39)$$

откуда следует такое соотношение:

$$\frac{G_э}{G} = \frac{k_j(1-\varepsilon_{jj}) - k_i(1-\varepsilon_{ii})}{\varepsilon_{ii} - \varepsilon_{jj}}. \qquad (2.7.40)$$

Если выполнить попарное умножение уравнений (2.7.39), то нетрудно убедиться, что в правой части окажутся только слагаемые, пропорциональные величинам второго порядка малости, т. е. произведениям $\varepsilon_{ii}\varepsilon_{jj}$. В левой части будут конечные величины $k_i k_j$, а также слагаемые, пропорциональные величинам ε_{ii}, которые взаимно сокращаются, и слагаемые, пропорциональные $\varepsilon_{ii}\varepsilon_{jj}$. Оставляя только конечные величины, получим три соотношения

$$k_i k_j - k_i^2 - k_j k_k + k_i k_k = 0, \qquad (2.7.41)$$

попарное сложение которых дает

$$(k_i - k_j)^2 = 0. \qquad (2.7.42)$$

Таким образом, с точностью до малых второго порядка $\varepsilon_{jj}\,\varepsilon_{jj}$ можно полагать, что $k_i = k_j = \bar{k}$ и поэтому из (2.7.40) находим

$$\frac{G_э}{G} = k \Rightarrow G_э = \bar{k}G \approx k_0 G. \qquad (2.7.43)$$

где $k_0 = \Delta V_0 / \Delta \bar{V}_0$ - сплошность среды в начальном состоянии.

Запишем теперь очевидное соотношение с учетом (2.7.43)

$$\frac{E_э}{E} = \frac{G_э(1+\nu_э)}{G(1+\nu)} = \frac{k_0(1+\nu_э)}{1+\nu}, \qquad (2.7.44)$$

где $E_э$ - эффективный модуль упругости Юнга; $\nu_э$ - эффективный коэффициент Пуассона.

Взаимосвязь между эффективным $E_э$ и действительным E модулями пористой среды не может быть аналогичной (2.7.43), поскольку согласно (2.7.44) в таком случае $\nu_э = \nu$. Эта взаимосвязь, по-видимому, как и (2.7.43), должна содержать k_0, но не может быть линейной относительно k_0. Кроме того, она должна быть такой, чтобы при изменениях ν в теоретически допустимых пределах $-1 \le \nu \le 0{,}5$ [1], эффективный коэффициент Пуассона $\nu_э$ тоже не выходил за эти пределы. И, наконец, для несжимаемого каркаса, когда $\nu = 0{,}5$, очевидно $\nu_э < 0{,}5$ при любых значениях $k_0 < 1$.

Перечисленным выше требованиям удовлетворяет зависимость, которую в наиболее общем виде можно записать так:

$$\frac{E_э}{E} = k_0^2 + c_1 k_0^3 + c_2 k_0^4 + ... + c_n k_0^{n+2}, \quad c_1 + c_2 + ... + c_n = 0, \qquad (2.7.45)$$

где c_i -коэффициенты, зависящие от особенностей структуры упругой пористой среды.

Подставляя (2.7.45) в (2.7.44), имеем

$$\nu_э = (1+\nu)\left(k_0 + c_1 k_0^2 + ...c_n k_0^{n+2}\right) - 1. \qquad (2.7.46)$$

В первом приближении можно также принять $c_i \approx 0$ и поэтому

$$\nu_э = (1+\nu)k_0 - 1, \qquad (2.7.47)$$

поскольку такая зависимость, хотя и не учитывает особенности структуры, но, как и (2.7.46), полностью удовлетворяет перечисленным выше требованием. И действительно, если $\nu = -1$, то $\nu_э = -1$. Если $\nu = 0{,}5$, то в зависимости от значения k_0, получим $\nu_э \le 0{,}5$. Если же $k_0 = 1$, то $\nu_э = \nu$.

Из (2.7.47) вытекает, что при некоторых положительных значениях ν и k_0 эффективный коэффициент Пуассона пористой среды становится отрицательным. Так, например, для $\nu = 0{,}5$ этот факт имеет место, если $k_0 < 2/3$, что не противоречит теории [1, стр. 256], но, разумеется, требует экспериментальной проверки.

С учетом (2.7.47) запишем также выражения и для эффективных параметров: объемного модуля упругости $E_{оэ}$ и постоянной Ляме $\lambda_э$

$$E_{оэ} = \frac{E_э}{1-2\nu_э} = \frac{2Gk_0^2(1+\nu)}{3-2k_0(1+\nu)}, \quad \lambda_э = \frac{2\nu_э G_э}{1-2\nu_э} = \frac{2G[(1+\nu)k_0 - 1]k_0}{3-2k_0(1+\nu)}. \quad (2.7.48)$$

Рассмотренные выше рассуждения и полученные на их основе зависимости по аналогии с упругими средами [17] можно распространить и на ньютоновские жидкости. Для этого достаточно произвести лишь формальную замену символов u на $\dot{u}$ в соответствующих соотношениях. После такой замены получим

$$\mu_э = k\mu,, \ \nu_э = (1+\nu)(k + c_1k^2 + ... + c_nk^{n+1}) - 1 \approx (1+\nu)k - 1,$$

$$\mu_{оэ} = \frac{2\mu k^2(1+\nu)}{3-2k(1+\nu)}, \quad (2.7.49)$$

где μ, $\mu_э$ - динамическая вязкость жидкости (действительная и эффективная); $\mu_{оэ}$ - объемная вязкость (эффективная).

Если вещество пористой среды представляет собой вязкую несжимаемую жидкость, для которой $\nu = 0{,}5$, то в этом случае

$$\nu_э = 1{,}5(k + c_1k^2 + ... + c_nk^{n+1}) - 1 \approx 1{,}5k - 1, \quad \mu_{оэ} = \frac{\mu k^2}{1-k}. \quad (2.7.50)$$

Таким образом, основным фактором, от которого зависят эффективные макроскопические параметры пористой среды, является величина ее сплошности k_0 и, возможно, особенности структуры.

Оценку влияния последних можно получить как путем эксперимента, так и теоретически, для чего необходимо более подробно сформулировать определение структурных аналогов континуальных характеристик макродеформаций ε_{ii}.

Следует заметить, что рассмотренные выше основные зависимости для эффективных параметров были получены автором с использованием и другого подхода, принципиально отличающегося от изложенного.

Эффективные параметры пористой среды были также получены и авторами [28, стр. 203]. Предложенные в [28] выражения для $E_э$ и $\nu_э$ имеют вид:

$$E_э = E\frac{k^2}{1+n(1-k)}, \qquad \nu_э = \frac{\nu + m(1-k)}{1+n(1-k)},$$

$$n = \frac{(5\nu-1)(1-3\nu)}{2(7-5\nu)}, \quad m = \frac{(1-5\nu)(3-\nu)}{2(7-5\nu)}.$$

Анализируя эти выражения нетрудно убедиться, что в случае, когда $\nu = 1/5$, получим совершенно неприемлемый результат. И действительно, после подстановки $\nu = 1/5$ в две последние формулы находим, что $n = m = 0$. Тогда из второй формулы вытекает, что $\nu_э = \nu$, т.е. коэффициент Пуассона не зависит от пористости $\overline{p} = 1-k$ при всех возможных ее значениях. Такое парадоксальное следствие, несомненно, противоречит здравому смыслу.

2.7.4. Краткие выводы

Рассмотренный в п. 2.5 метод построения определяющих соотношений (2.5.14) обладает достаточно большой общностью и, наряду с одномерными системами, может быть распространен и на пространственные объекты. Это позволяет получить определяющие соотношения для тела в целом, описывающие взаимосвязь между некоторыми характерными размерами тела, координатами приложения и интенсивностью внешних сил. Из этих соотношений, как частный случай, могут быть выведены одномерные аналоги (2.5.14).

Определяющие соотношения для тела в целом в свою очередь позволяют определять упругие контакты на образцах произвольной

формы при наличии достоверной информации об интенсивности поверхностного нагружения.

Упомянутым выше не ограничивается применение определяющих соотношений для тела в целом. С их помощью можно достаточно просто получить выражения для эффективных параметров, например, пористой среды.

2.7.5. Контрольные вопросы

1. Расскажите о подходе к выводу формулы для средних по объему тела напряжений.
2. Запишите общую формулу, с помощью которой можно получить выражения для средних деформаций.
3. Запишите выражения для средних по объему продольных деформаций.
4. Запишите взаимосвязь между средней объемной и продольными деформациями.
5. Запишите обобщенный закон упругости в осредненном виде.
6. Назовите основные характерные размеры тела, которые используются при записи выражений для средних деформаций.
7. Расскажите, каким путем можно перейти от определяющих соотношений для микрообъема упругой среды к определяющим соотношениям для тела в целом.
8. Сделайте корректный переход от общих формул для тела в целом к общеизвестной формуле применительно к одностороннему растяжению стержня.

Список использованной литературы

1. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. Учебное пособие для университетов.– М.: Наука, 1979.– 744 с.
2. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. Пер. с англ.– М.: Машиностроение, 1985.– 472 с.
3. Василенко Н.В. Теория колебаний. Учебное пособие для втузов.– К.: Вища школа, 1992.– 430 с.
4. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. Учебное пособие для университетов.– М.: Наука, 1972.– 688 с.

5. Козачок А.А. Парадоксы классических решений волнового уравнения. Вестник НТУУ «КПИ», «Машиностроение», 2000.– Вып. 38, т. 2.– с. 124-133.

6. Козачок А. А. Парадоксы механики сплошных сред. Часть 1. Вопросы нелинейной динамики сплошных сред.– К.: Політехніка, 2003.– 89 с.

7. Араманович Н. Т., Левин В. И. Уравнения математической физики. Учебное пособие для втузов.– М.: Наука, 1969.– 288 с.

8. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Учебное пособие для университетов.– М.: Наука, 1972.– 736 с.

9. Шебалин О.Д. Физические основы механики и акустики. Учебное пособие для физико-математических факультетов педагогических институтов.– М.: Высшая школа, 1981.– 261 с.

10. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. Пер. с англ.– М.: Наука, 1966.–228 с.

11. Козачок А.А. Новые уравнения динамики машин // The 4-th IFTOMM Intern. Symp. Theory and Practice of Mech.– Bucharest, Romania.– 1985.–vol. I-1.– P. 201–208.

12. Кухта К.Я., Кравченко В.П. Динамика непрерывно-дискретных систем.– К.: Наукова думка, 1978.– 131 с.

13. Исследование сложных непрерывно-дискретных систем / Кухта К.Я., Бойко А.Г., Гармаш Н.З. и др.– К.: Наукова думка, 1981.– 272 с.

14. Кожевников С.Н. Динамика нестационарных процессов в машинах.– К.: Наукова думка, 1986.– 288 с.

15. Єременко О.І. Розробка методів розрахунку машин з континуально-дискретними стержневими і замкнутими системами. Автореф. дис. канд. техн. наук: 05. 02. 09. НТУУ “КПІ”.– К, 1997.– 17 с.

16. Маслов Г.С. Расчеты колебаний валов. Справочник.– М.: Машиностроение, 1967.– 431 с.

17. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. Учебник для втузов.– М.: Высшая школа, 1968.– 512 с.

18. Давыдов Б.Л., Скородумов Б.А. Статика и динамика машин.– М.: Машиностроение, 1967.– 431 с.

19. Бессонов А.П. Основы динамики механизмов с переменной массой звеньев.– М.: Наука, 1967.– 279 с.

20. Савин Г.Н., Горошко О.А. Динамика нити переменной длины.– К.: Изд-во АН УССР, 1962.– 332 с.

21. Савин Г.Н. Об основных уравнениях шахтного подъема каната (подъема груза) // Прикладная механика.– 1955.– 1, вып. 1.– С. 5–22.

22. Ишлинский А.Ю. Об одном интегро-дифференциальном соотношении в теории упругой нити (каната) переменной длины // Укр. мат. журн.– 1953.– № 4.– С. 370–374.

23. Савин Г.Н., Путята Т.В., Фрадлин Б.Н. Курс теоретической механики. Учебник.– К.: Вища школа, 1973.– 360 с.

24. Козачок А.А. Основные уравнения динамики машин с переменной структурой // Landtechnik: Wissenschuftliche zeitschriftder Wilhelm-Pieck-Universitat.– Rostock.– 1987.– N-Reihe 36.7.– S. 68–72.

25. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных сред.– М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976.– 368 с.

26. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред.– М.: Наука, 1977.– 400 с.

27. Сендецки Дж. Механика композиционных материалов, т. 2. Пер. с англ.– М.: Мир, 1978.– 368 с.

28. Механика композитов (в 12 т) // К.: Наукова думка, 1993.–т. 3: Хорошун Л.П., Маслов Б.П., Шикула Е.Н., Назаренко Л.В. Статистическая механика и эффективные свойства материалов.– 380 с.

29. Козачок А.А. Новые подходы к постановке задач для волнового уравнения // Вісник Сумського державного університету. Сер. Технічні науки.– 2003.– № 12 (58).– С. 174–178.

Сколько бы ни было точно математическое решение, оно не может быть точнее тех приближенных предпосылок, на коих оно основано.

А. Н. Крылов

Послесловие

Слова акад. Крылова А. Н., как и высказывания Эйлера, Фейнмана,а также Томаса Хаксли о математических жерновах, приведенные в качестве эпиграфов, красноречиво проливают свет на возможное происхождение вскрытых автором парадоксальных особенностей уравнений движения и многих точных решений классических задач, вошедших в учебники математической физики, теории упругости, теории колебаний и др. Перечень таких особенностей в подытоженном виде и указанных в очередности, согласно их значимости, выглядит так:

– уравнения Ламе, в противоположность общепринятому мнению, становятся существенно некорректными (область применимости сужается до чисел Маха $M << 1$) или даже ошибочными (когда $\partial^2 u(x,t)/\partial t^2 \approx 0$), если в качестве выражения для ускорения в них взять его точную запись в переменных Лагранжа, т. е. $\partial^2 u(x_0,t)/\partial t^2$; даже традиционное уравнение колебаний струны имеет гораздо меньшую область применения, чем принято считать;

– уравнения Ламе, согласно достаточно распространенному, вошедшему в учебные пособия, мнению, почему-то не позволяют получать решения при резонансе, аналогичные тем, которые хорошо исследованы для дискретных систем;

– нарушение классического принципа суперпозиции для точных решений многих задач и физическая бессмысленность вытекающих из них следствий, которая проявляется в большей степени при большем количестве удерживаемых для расчета членов бесконечного ряда.

К сожалению, обнаруженные парадоксы – не просто любопытные факты, которые уже получили объяснение во второй части пособия. Находящиеся фактически на поверхности, но почему-то не замеченные нашими предшественниками, они позволили занять место в учебниках сомнительным научным положениям фундаментального характера,

усвоенным не одним поколением инженеров и научных работников. Поэтому ломка представлений, проникших в сознание в процессе инженерно-технического и особенно университетского образования, требует кропотливого труда и времени. С молодежью, свободной от бремени устоявшихся сомнительных представлений, дело обстоит проще. Несоизмеримо сложнее, согласно знаменитому высказыванию К. Трусделла, суметь «не потакать пресловутому нежеланию старцев учиться ничему новому» [3, стр. 11] особенно, когда приходится иметь дело с известными авторитетами, занимающими высокое положение в научном мире.

Автору в этом смысле пока заметно везло, поскольку большинство авторитетных ученых, с которыми пришлось дискутировать, не соответствовали пресловутой категории, упомянутой в изречении К. Трусделла. И, вероятно, только поэтому на убеждения пришлось потратить лишь три года, а не всю жизнь, как это часто бывало в истории науки. Определенное сопротивление, особенно после объяснения причины (а точнее, физических недоразумений), с которым пришлось все же встретиться в процессе признания изложенных в пособии результатов, автор считает вполне естественным. Не так легко некоторым оппонентам, очевидно, признать, что научные положения, находящиеся в основе их собственных работ и считавшиеся непоколебимыми, требуют пересмотра, как недостаточно корректные или даже ошибочные. И тем не менее, выигрыш от такого признания существенно больше возможных моральных потерь, связанных с девальвацией части наследия линейной теории. Новые научные направления, которые открываются в области совершенно не исследованных нелинейных аспектов механики деформируемого твердого тела, лишний раз опровергают утверждения скептиков об отсутствии фундаментальных проблем в этой области знаний. Источником таких проблем являются и обнаруженные парадоксы точных решений, и дополнительные ограничения, которых требуют линейные уравнения, и поиски новых методов решения нелинейных задач. И вот, если обсуждения физических и математических недоразумений, связанных с точными решениями классических задач, в публикациях, как представляется автору, не встречаются, то замечания по поводу ограниченности малыми числами Маха линеаризованных уравнений движения

известны и в гидродинамике [28, 29 ч.1; 29 ч.2], и в акустике [27, стр. 11, 16]. И только уверенность многих поколений профессионалов, что эти ограничения, вероятно, присущи только гидродинамике при конечных деформациях, в итоге и привела к тому, что возможные случаи, когда линейная теория справедлива, были экстраполированы и узаконены, как всеобщее правило. К тому же возможность точной записи ускорения без нелинейных членов для произвольных чисел Маха, но в лагранжевых переменных, не оставляла никаких сомнений относительно непоколебимости этого правила, позволяющего обеспечить элегантную, а на самом деле кажущуюся, простоту общим уравнениям классической теории упругости по сравнению с уравнениями гидродинамики. И то, что упомянутая простота все же связана с некорректной записью этих уравнений, было показано в публикациях [28, 29 см. ч.1] и более аргументировано, как хотел бы надеяться автор, в предлагаемом читателю учебном пособии